ПОСОБИЕ ПРОШЛО НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКУЮ ОЦЕНКУ ФГБНУ ФИПИ ШКОЛЕ

ПРОЕКТ С УЧАСТИЕМ РАЗРАБОТЧИКОВ КИМ ЕГЭ

2022

ЕГЭ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ

под редакцией
И. В. ЯЩЕНКО

НОВАЯ МОДЕЛЬ КИМ ЕГЭ

36 ВАРИАНТОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО НАЦИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
0123345678

ПОСОБИЕ ПРОШЛО НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКУЮ ОЦЕНКУ ФГБНУ

ФИПИ

ШКОЛЕ

2022

ПРОЕКТ С УЧАСТИЕМ РАЗРАБОТЧИКОВ КИМ ЕГЭ

ЕГЭ

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ

И. В. ЯЩЕНКО

НОВАЯ МОДЕЛЬ КИМ ЕГЭ

36 ВАРИАНТОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
НАЦИОНАЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ
Москва
2022

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721
Е31

Пособие прошло научно-методическую оценку ФГБНУ «ФИПИ»

ЧОУ ДПО «Московский центр непрерывного математического образования»

Авторы-составители:
И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий, Е. А. Коновалов

Под редакцией И. В. Ященко,
руководителя комиссии по разработке КИМ, используемых при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике

В сборнике использованы задачи, предложенные
И. Р. Высоцким, Р. К. Гординым, Е. А. Коноваловым,
М. Я. Пратусевичем, Д. А. Ростовским, А. Р. Рязановским,
В. А. Смирновым, К. М. Столбовым, А. С. Трепалиным,
Ю. А. Цимбаловым, С. А. Шестаковым, Д. Э. Шнолем, И. В. Ященко

Е31 **ЕГЭ.** Математика. Профильный уровень : типовые экзаменационные варианты : 36 вариантов / под ред. И. В. Ященко. — Москва : Издательство «Национальное образование», 2022. — 224 с. — (ЕГЭ. ФИПИ — школе).

ISBN 978-5-4454-1541-1.

Серия подготовлена разработчиками контрольных измерительных материалов (КИМ) единого государственного экзамена. В сборнике представлены:

- 36 типовых экзаменационных вариантов, составленных в соответствии с демоверсией КИМ ЕГЭ по математике **профильного уровня 2022** года;
- инструкция по выполнению экзаменационной работы;
- ответы ко всем заданиям;
- решения и критерии оценивания заданий 12–18.

Выполнение заданий типовых экзаменационных вариантов предоставляет обучающимся возможность самостоятельно подготовиться к государственной итоговой аттестации, а также объективно оценить уровень своей подготовки.

Учителя могут использовать типовые экзаменационные варианты для организации контроля результатов освоения школьниками образовательных программ среднего общего образования и интенсивной подготовки обучающихся к ЕГЭ.

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-4454-1541-1

Содержание

Введение

Сборник предназначен для подготовки к единому государственному экзамену по математике и содержит 36 полных вариантов, составленных в соответствии с проектом демоверсии КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня. Варианты подготовлены специалистами федеральной комиссии разработчиков контрольных измерительных материалов ЕГЭ.

В соответствии с документами, регламентирующими ЕГЭ по математике профильного уровня в 2022 году, каждый вариант содержит 18 заданий. Первая часть состоит из 11 заданий, вторая — из 7 заданий. Последние семь заданий подразумевают полное развёрнутое решение.

Семь вариантов даны с решениями, позволяющими проверить полноту и точность Ваших рассуждений. Ответы имеются ко всем заданиям.

В книге приведены типовые бланки ответов ЕГЭ, а также дана карта индивидуальных достижений обучающегося, которую можно использовать для отслеживания динамики результативности выполнения заданий типовых экзаменационных вариантов.

Если Вы собираетесь поступить в вуз на техническую или экономическую специальность и Вам нужен высокий балл на ЕГЭ по математике, эта книга для Вас.

Если Вы планируете продолжать своё математическое образование и претендуете на 90–100 баллов на ЕГЭ по математике, то Вам эта книга также будет полезна.

Как пользоваться сборником

Если Ваша цель — подтвердить свою школьную оценку и самооценку и получить хороший балл по математике для поступления в вуз, Ваш экзамен состоит из заданий 1–14. Все эти задания являются стандартными с точки зрения школьной программы. Помимо заданий практико-ориентированного блока, здесь предлагаются задачи на понимание основных фактов и идей школьного курса математики, а также задачи, где нужно решить уравнения, найти элементы пространственной фигуры, исследовать функцию и т. п. Вы достигнете своей цели тренировкой, тренировкой и тренировкой. Обратите также внимание на задания 15 и 16. Они, конечно, посложнее предыдущих. Здесь уже нужно подумать, пофантазировать.

Если Ваша цель — поступить на математическую специальность и Вам нужен очень высокий балл на ЕГЭ, тогда Вы должны уверенно решать задания 1–14 (как ни странно, наиболее подготовленные учащиеся часто ошибаются в простых заданиях по небрежности). Вам нужно уметь выполнять (может быть, с некоторыми недочётами) задания 15 и 16. Основной объект Вашего внимания — задание 17, требующее умения комбинировать геометрические и алгебраические идеи, видеть за уравнением фигуру, за рисунком — решение уравнений и их систем; умения вообразить взаимное расположение двигающихся по плоскости линий и фигур.

Задание 18 требует высокой математической культуры, но не очень много специальных знаний. Все необходимые сведения о целых числах и делимости изучаются в 5–7 классах. Вопрос не в знаниях, а в том, как их применить. Здесь важно сочетание опыта, фантазии и подготовки. Помощь окажут сборники олимпиадных заданий, популярные математические статьи и журналы. Небесполезным, надеемся, будет и наш сборник.

Как пользоваться готовыми решениями вариантов

Обратите внимание на то, что некоторые варианты похожи друг на друга. Будем говорить, что такие варианты собраны по одному плану. Если для какого-то варианта приведены решения задач, то варианты, собранные по тому же плану, имеют аналогичные решения. Можно предложить два способа использования готовых решений при подготовке.

Вы не можете решить задачу: в этом случае посмотрите решение и тщательно разберитесь в нём. Недостаточно просто прочесть решение и понять, что та́м написано. Решения не очень подробные. Нужно проделать самостоятельно пропущенные выкладки, не только понять ход решения, но и снять возникающие вопросы «почему так?». Когда Вы разберётесь в решении, попробуйте повторить его самостоятельно, осмысленно и осознанно воспроизводя все логические шаги и вычисления. Ваш вариант решения будет гораздо больше по объёму, поскольку он будет подробнее. Затем возьмите вариант того же плана, но без решения, и решите в этом варианте аналогичное задание, ещё раз воспроизводя все логические построения и вычисления. Наконец, попробуйте изменить решение, может быть, улучшить его. Попробуйте решить похожую задачу с изменённым условием.

Вы решили задание самостоятельно, и ответы совпали. Это не означает, что Ваше решение не содержит упущений или логических ошибок. Сравните своё решение с решением, предложенным авторами. Попробуйте определить, какое решение Вам нравится больше, разобраться, в чём решения различаются, а в чём схожи. Проверьте, рассмотрели ли Вы все нужные случаи, убедительно ли сумели объяснить все свои построения и преобразования.

Карта индивидуальных достижений обучающегося

Впишите баллы, полученные Вами при выполнении типовых экзаменационных вариантов, в таблицу.

Вариант / Задание	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		
8																		
9																		
10																		
11																		
12																		
13																		
14																		
15																		
16																		
17																		
18																		
Сумма баллов																		

Вариант / Задание	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
1																		
2																		
3																		
4																		
5																		
6																		
7																		
8																		
9																		
10																		
11																		
12																		
13																		
14																		
15																		
16																		
17																		
18																		
Сумма баллов																		

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: ______-0,8______. -0,8 Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

БЛАНК ОТВЕТОВ № 1

Код региона | Код предмета | Название предмета

Подпись участника ЕГЭ строго внутри окошка

Резерв - 4

Заполнять гелевой или капиллярной ручкой ЧЕРНЫМИ чернилами ЗАГЛАВНЫМИ ПЕЧАТНЫМИ БУКВАМИ и ЦИФРАМИ по следующим образцам:

А Б В Г Д Е Ё Ж З И Й К Л М Н О П Р С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z , –

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 À Á Â Ö Ô È É Ê Ë Ì Ï Ù Ú Û ß Ç

ВНИМАНИЕ! Все бланки и контрольные измерительные материалы рассматриваются в комплекте

Результаты выполнения заданий с КРАТКИМ ОТВЕТОМ

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40

Замена ошибочных ответов на задания с КРАТКИМ ОТВЕТОМ

ЗАПОЛНЯЕТСЯ ОТВЕТСТВЕННЫМ ОРГАНИЗАТОРОМ В АУДИТОРИИ:

Количество заполненных полей «Замена ошибочных ответов»

ЕДИНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН – 2022

БЛАНК ОТВЕТОВ № 2

лист 1

Код региона [redacted] Код предмета [redacted] Название предмета [redacted]

Резерв - 5

Бланк ответов № 2 (лист 2) [redacted]

Лист [redacted]

Перепишите значения полей "Код региона", "Код предмета", "Название предмета" из БЛАНКА РЕГИСТРАЦИИ.

Отвечая на задания с РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ, пишите аккуратно и разборчиво, соблюдая разметку страницы.

Не забудьте указать номер задания, на которое Вы отвечаете, например, **31**.

Условия задания переписывать не нужно.

ВНИМАНИЕ! **Все бланки и контрольные измерительные материалы рассматриваются в комплекте**

Оборотная сторона бланка НЕ ЗАПОЛНЯЕТСЯ. Используйте бланк ответов № 2 (лист 2).

ВАРИАНТ 1

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

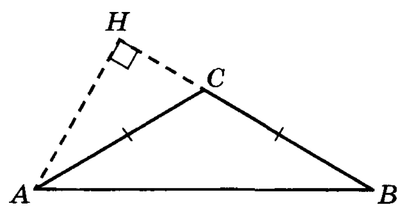
1 Найдите корень уравнения $4^{5x+2}=0{,}8\cdot 5^{5x+2}$.

Ответ:___________________.

2 На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна 0,1. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,15. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Ответ:___________________.

3 В тупоугольном треугольнике ABC известно, что $AC=BC=10$, высота AH равна $\sqrt{51}$. Найдите косинус угла ACB.

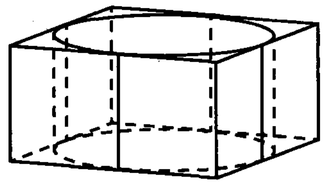


Ответ:___________________.

4 Найдите значение выражения $\dfrac{5\sin 61^\circ}{\sin 299^\circ}$.

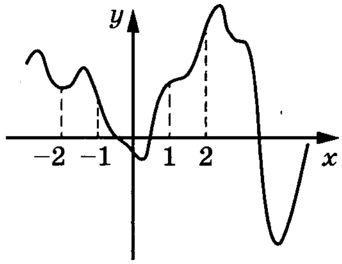
Ответ:___________________.

5 Цилиндр вписан в правильную четырёхугольную призму. Радиус основания и высота цилиндра равны 3. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



Ответ:___________________.

6 На рисунке изображён график $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -2, -1, 1, 2. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ:___________________.

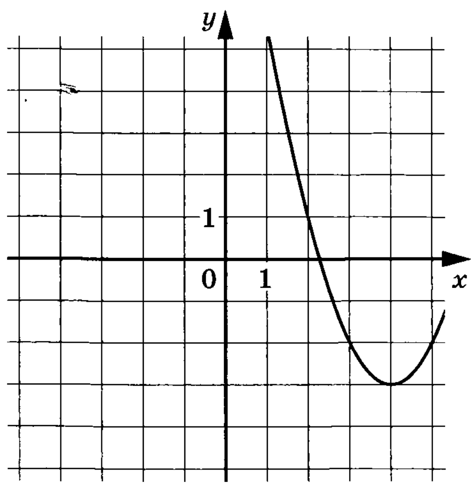
7 При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}(^\circ C)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ:___________________.

8 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 105 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 4 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:___________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите $f(-5)$.



Ответ:___________________.

10 Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 30 % этих стёкол, вторая — 70 %. Первая фабрика выпускает 5 % бракованных стёкол, а вторая — 4 %. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ:__________________.

11 Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{4}{3}x\sqrt{x}-3x+9$ на отрезке $[0{,}25;\ 30]$.

Ответ:__________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $2\sin^3(\pi+x)=\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$.

13 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 16, высота SH равна 10. Точка K — середина бокового ребра SA. Плоскость, параллельная плоскости ABC, проходит через точку K и пересекает рёбра SB и SC в точках Q и P соответственно.

а) Докажите, что площадь четырёхугольника $BCPQ$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SBC.

б) Найдите объём пирамиды $KBCPQ$.

14 Решите неравенство $\left(4^x-5\cdot 2^x\right)^2-20\left(4^x-5\cdot 2^x\right)\leq 96$.

15 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 8 лет. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027, 2028 и 2029 годов долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2030, 2031, 2032 и 2033 годов долг возрастает на 18 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2033 года кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1125 тысяч рублей?

16 Точки A, B, C, D и E лежат на окружности в указанном порядке, причём $AE = ED = CD$, а прямые AC и BE перпендикулярны. Отрезки AC и BD пересекаются в точке T.

а) Докажите, что прямая EC пересекает отрезок TD в его середине.

б) Найдите площадь треугольника ABT, если $BD = 6$, $AE = \sqrt{6}$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2 - a^2\right| = |x + a| \cdot \sqrt{x^2 - 4ax + 5a}$$

имеет ровно один корень.

18 На доске написаны три различных натуральных числа. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 2022?

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 2021?

в) В тройке чисел первое число трёхзначное, а третье равно 2. Сколько существует таких троек?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 2

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

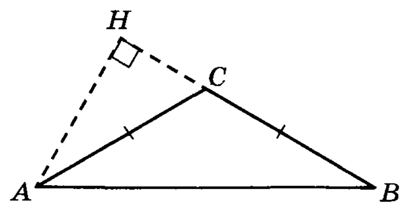
1 Найдите корень уравнения $9^{2x+5} = 3{,}24 \cdot 5^{2x+5}$.

Ответ:___________________.

2 На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,25. Вероятность того, что это вопрос по теме «Площадь», равна 0,3. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Ответ:___________________.

3 В тупоугольном треугольнике ABC известно, что $AC = BC$, высота AH равна 3, $CH = \sqrt{7}$. Найдите синус угла ACB.

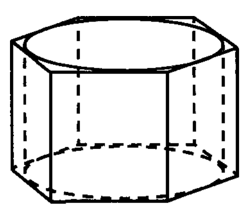


Ответ:___________________.

4 Найдите значение выражения $\dfrac{4\cos 121^\circ}{\cos 59^\circ}$.

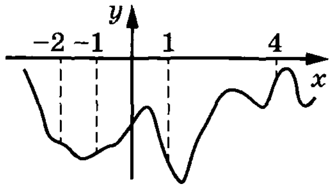
Ответ:___________________.

5 Цилиндр вписан в правильную шестиугольную призму. Радиус основания цилиндра равен $\sqrt{3}$, а высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



Ответ:___________________.

6 На рисунке изображён график $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки -2, -1, 1, 4. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ:____________________.

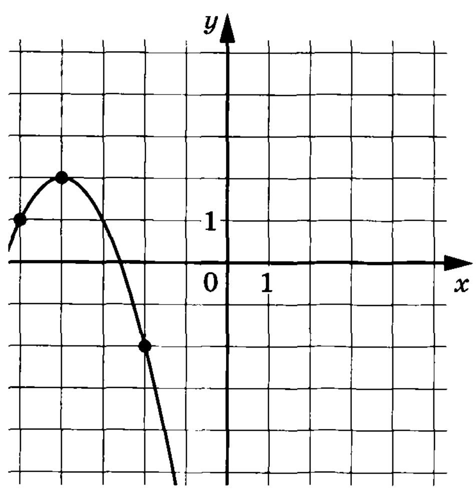
7 При температуре 0 °C рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}(^\circ\mathrm{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 7,2 мм? Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ:____________________.

8 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 135 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 9 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 4 часа. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:____________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите $f(-9)$.



Ответ:____________________.

10 Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 25 % этих стёкол, вторая — 75 %. Первая фабрика выпускает 5 % бракованных стёкол, а вторая — 1 %. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Ответ:___________________.

11 Найдите точку минимума функции $y=\frac{4}{3}x\sqrt{x}-5x+4$.

Ответ:___________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $2\cos^3(x-\pi)=\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2};\frac{11\pi}{2}\right]$.

13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AD равна 10, высота SH равна 12. Точка K — середина бокового ребра SD. Плоскость AKB пересекает боковое ребро SC в точке P.

а) Докажите, что площадь четырёхугольника $CDKP$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SCD.

б) Найдите объём пирамиды $ACDKP$.

14 Решите неравенство $\left(25^x-4\cdot5^x\right)^2+8\cdot5^x<2\cdot25^x+15$.

15 В июле 2023 года планируется взять кредит на 10 лет на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

– каждый январь с 2024 по 2028 год долг возрастает на 18 % по сравнению с концом предыдущего года;
– каждый январь с 2029 по 2033 год долг возрастает на 16 % по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2033 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите сумму, которую планируется взять в кредит, если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1470 тыс. рублей.

16 Точки A, B, C, D и E лежат на окружности в указанном порядке, причём $BC = CD = DE$, а $AC \perp BE$. Точка K — пересечение прямых BE и AD.

а) Докажите, что прямая CE делит отрезок KD пополам.

б) Найдите площадь треугольника ABK, если $AD = 4$, $DC = \sqrt{3}$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x + a| \cdot \sqrt{x^2 - 5ax + 4a}$$

имеет ровно два различных корня.

18 На доске написаны три различных натуральных числа. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 3456?

б) Может ли сумма этих чисел быть равна 2345?

в) В тройке чисел первое число трёхзначное, а третье равно 5. Сколько существует таких троек?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 3

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

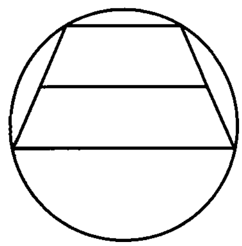
1 Решите уравнение $x=\frac{8x+36}{x+13}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ:____________________.

2 На клавиатуре телефона 10 цифр, от 0 до 9. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной и меньше 7?

Ответ:____________________.

3 Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 38, средняя линия равна 11. Найдите боковую сторону трапеции.

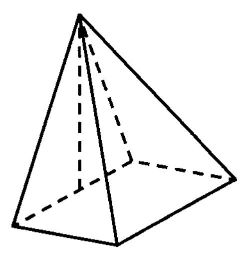


Ответ:____________________.

4 Найдите значение выражения $2^{4\sqrt{10}-3}\cdot 2^{1-3\sqrt{10}}:2^{\sqrt{10}-1}$.

Ответ:____________________.

5 Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Высота пирамиды равна 6. Найдите объём пирамиды.



Ответ:____________________.

6 Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 - 3t + 15,$$

где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 7$ с.

Ответ:__________________.

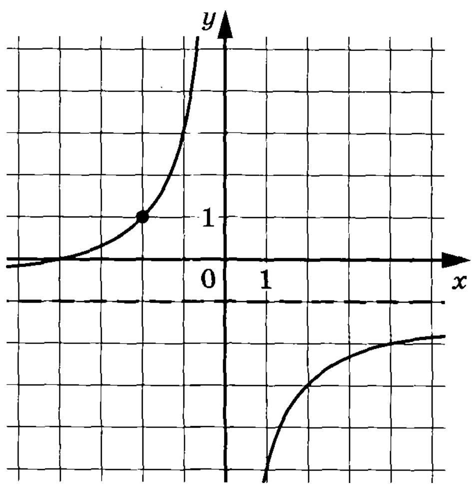
7 Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_п = 20$ °C, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0{,}5$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_в = 72$ °C до температуры T, причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п}$, где $c = 4200 \frac{Вт \cdot с}{кг \cdot °C}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{Вт}{м \cdot °C}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}5$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 100 м.

Ответ:__________________.

8 Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5 % меди, второй — 14 % меди. Масса второго сплава больше массы первого на 5 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 12 % меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ:__________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите $f(-8)$.



Ответ:__________________.

10 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,25. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,1. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Ответ:___________________.

11 Найдите наименьшее значение функции $y = 42\cos x - 45x + 35$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$.

Ответ:___________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $3\cdot 9^{x+1} - 5\cdot 6^{x+1} + 4^{x+1,5} = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

13 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ на рёбрах AC и BC отмечены соответственно точки M и N так, что $AM : MC = CN : BN = 2 : 1$.

а) Докажите, что плоскость MNB_1 проходит через середину ребра A_1C_1.

б) Найдите площадь сечения призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью MNB_1, если $AB = 6$, $AA_1 = \sqrt{3}$.

14 Решите неравенство $27^{\lg(x-1)} \le \left(x^2 - 1\right)^{\lg 3}$.

15 По вкладу «А» банк в конце каждого года увеличивает на 20 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает эту сумму на 12 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наибольшее натуральное число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад будет менее выгоден, чем вклад «А».

16 В параллелограмме $ABCD$ угол A острый. На продолжениях сторон AD и CD за точку D выбраны точки M и N соответственно, причём $AN = AD$ и $CM = CD$.

а) Докажите, что $BN = BM$.

б) Найдите MN, если $AC = 5$, $\sin\angle BAD = \frac{5}{13}$.

17 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых корни уравнения $3a^{2x} - 16^x + 2\cdot(4a)^x = 0$ принадлежат отрезку $[-2;\ -1]$.

18 Известно, что a, b, c, d, e и f — это различные, расставленные в некотором, возможно ином, порядке числа 2, 3, 4, 5, 6 и 16.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = 6$?

б) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{961}{240}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 4

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

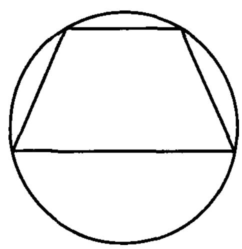
1 Решите уравнение $\frac{7x}{3x^2-26}=1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ: ________________.

2 Из множества натуральных чисел от 56 до 80 (включительно) наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 4?

Ответ: ________________.

3 Боковая сторона равнобедренной трапеции равна её меньшему основанию, угол при основании равен 60°, большее основание равно 28. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.

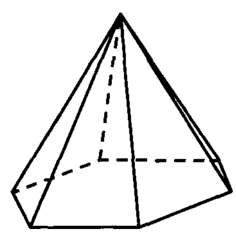


Ответ: ________________.

4 Найдите значение выражения $5^{\sqrt{3}-4}\cdot 5^{1+3\sqrt{3}}:5^{4\sqrt{3}-1}$.

Ответ: ________________.

5 Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 3, боковое ребро равно 6. Найдите объём пирамиды.



Ответ: ________________.

6 Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = -\frac{1}{2}t^4 + 4t^3 - t^2 - t + 14,$$

где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t = 5$ с.

Ответ:___________________.

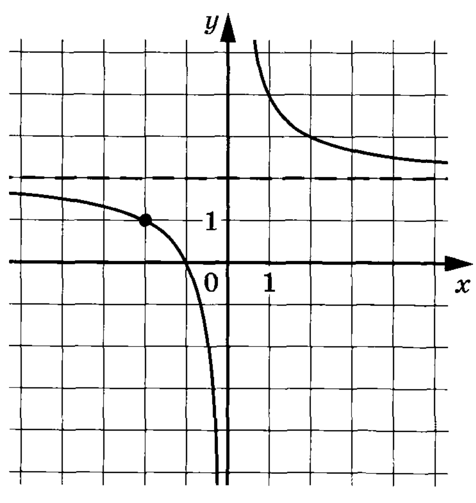
7 Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_п = 15$ °C, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды $m = 0{,}5$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_в = 79$ °C до температуры T, причём $x = \alpha\frac{cm}{\gamma}\log_2\frac{T_в - T_п}{T - T_п}$, где $c = 4200\ \frac{\text{Вт}\cdot\text{с}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1{,}3$ — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 130 м.

Ответ:___________________.

8 Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5 % никеля, второй — 14 % никеля. Масса второго сплава больше массы первого на 8 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 11 % никеля. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ:___________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 7.



Ответ:___________________.

10 В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится чай, равна 0,2. Вероятность того, что чай закончится в обоих автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется в обоих автоматах.

Ответ:___________________.

11 Найдите наибольшее значение функции $y=49x-46\sin x+37$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$.

Ответ:___________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $25^{x-0,5}-13\cdot 10^{x-1}+4^{x+0,5}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

13 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ на рёбрах AC и BC отмечены соответственно точки M и N так, что $AM : MC = CN : BN = 2 : 1$, точка K — середина ребра A_1C_1.

а) Докажите, что плоскость MNK проходит через вершину B_1.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости KMN, если $AB=6$, $AA_1=2,4$.

14 Решите неравенство $8^{\lg(-1-x)}\le\left(x^2-1\right)^{\lg 2}$.

15 По вкладу «А» банк в конце каждого года увеличивает на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает эту сумму на 14 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее натуральное число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад будет более выгоден, чем вклад «А».

16 В параллелограмме $ABCD$ тангенс угла A равен 1,5. На продолжениях сторон AB и BC параллелограмма за точку B выбраны точки N и M соответственно, причём $BC = CN$ и $AB = AM$.

а) Докажите, что $DN = DM$.

б) Найдите MN, если $AC = \sqrt{13}$.

17 Найдите все положительные значения a, при каждом из которых корни уравнения $5a^{2x} - 2\cdot 4^x + 9\cdot(2a)^x = 0$ принадлежат отрезку $[-3;\ 1]$.

18 Известно, что a, b, c, d, e и f — это различные, расставленные в некотором, возможно ином, порядке числа 2, 3, 4, 6, 7 и 16.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=11$?

б) Может ли выполняться равенство $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{1345}{336}$?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 5

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

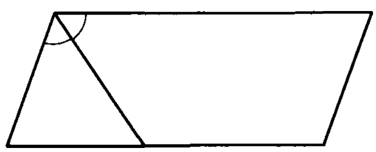
1 Решите уравнение $\sqrt{9-8x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ:___________________.

2 При изготовлении подшипников диаметром 62 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не больше, чем на 0,01 мм, равна 0,986. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше, чем 61,99 мм, или больше, чем 62,01 мм.

Ответ:___________________.

3 Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении $3:4$, считая от вершины острого угла. Найдите бóльшую сторону параллелограмма, если его периметр равен 33.

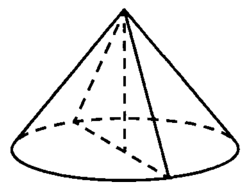


Ответ:___________________.

4 Найдите значение выражения $\dfrac{2^{\log_9 3}}{2^{\log_9 243}}$.

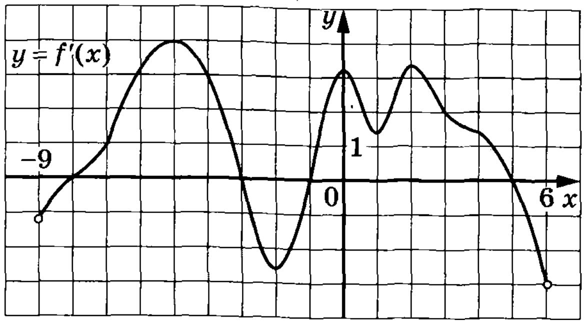
Ответ:___________________.

5 Высота конуса равна 18, а длина образующей равна 30. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



Ответ:___________________.

6 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9;\ 6)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ:____________________.

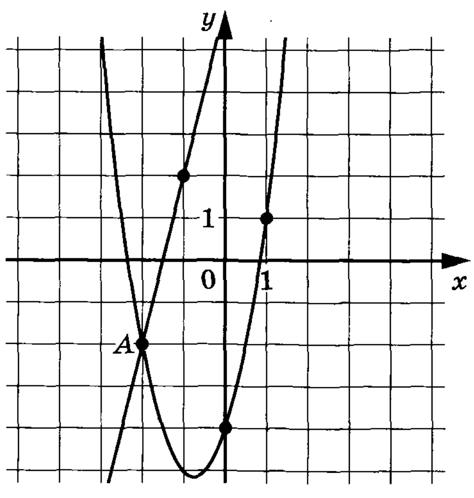
7 Груз массой 0,25 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \cos\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 2$ с — период колебаний, $v_0 = 1{,}6$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 56 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ:____________________.

8 Баржа в 10:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 15 км от А. Пробыв 45 минут в пункте В, баржа отправилась назад и вернулась в пункт А в 16:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость баржи равна 7 км/ч.

Ответ:____________________.

9 На рисунке изображены графики функций $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx + d$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ:____________________.

10 Биатлонист 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 2 раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Ответ:__________________.

11 Найдите наибольшее значение функции $y=x^5+5x^3-140x$ на отрезке $[-8;\ -1]$.

Ответ:__________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\sin 2x+\cos 2x=1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

13 В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ боковое ребро равно $\sqrt{3}$, а сторона основания равна 2. Через точку A_1 перпендикулярно плоскости AB_1D_1 проведена прямая l.

а) Докажите, что прямая l пересекает отрезок AC и делит его в отношении $3:1$.

б) Найдите угол между прямыми l и CB_1.

14 Решите неравенство $7^{\log_{\frac{1}{7}}\log_{\frac{1}{2}}(-x)}<2^{\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{7}}(-x)}$.

15 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 тыс. рублей на 6 лет. Условия его возврата таковы:

– в январе 2026, 2027 и 2028 годов долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
– в январе 2029, 2030 и 2031 годов долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 498 тысяч рублей. Найдите r.

16 Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC.

а) Докажите, что $\angle AOB = \angle COD = 90°$.

б) Найдите отношение большего основания трапеции к меньшему, если известно, что $AB = CD$, а площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет $\frac{12}{49}$ площади трапеции $ABCD$.

17 Найдите все такие значения a, при каждом из которых неравенство

$$-1 \le \sin x(a - \cos 2x) \le 1$$

верно при всех действительных значениях x.

18 Отношение трёхзначного натурального числа к сумме его цифр — целое число.

а) Может ли это отношение быть равным 34?
б) Может ли это отношение быть равным 84?
в) Какое наименьшее значение может принимать это отношение, если первая цифра трёхзначного числа равна 4?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 6

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

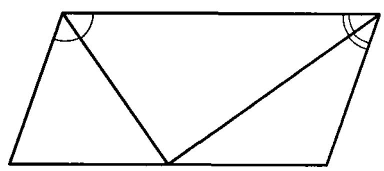
1 Решите уравнение $\sqrt{72+x}=-x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ:____________________.

2 Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже чем 36,8 °С, равна 0,71. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется 36,8 °С или выше.

Ответ:____________________.

3 Точка пересечения биссектрис двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, принадлежит противоположной стороне. Меньшая сторона параллелограмма равна 6. Найдите его бо́льшую сторону.

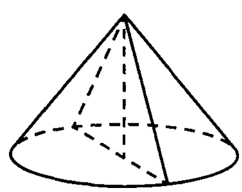


Ответ:____________________.

4 Найдите значение выражения $\dfrac{2^{\log_6 2}}{2^{\log_6 432}}$.

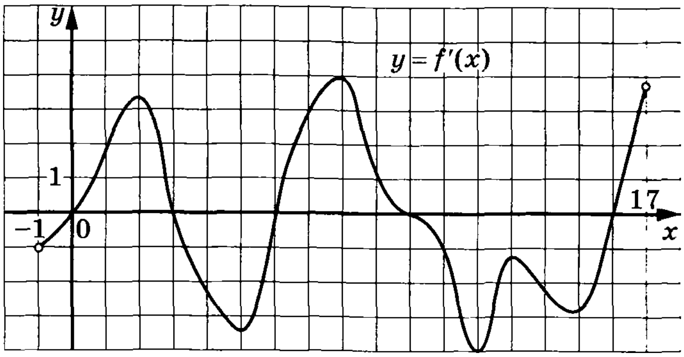
Ответ:____________________.

5 Диаметр основания конуса равен 32, а длина образующей равна 20. Найдите площадь осевого сечения этого конуса.



Ответ:____________________.

6 На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1;\ 17)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



Ответ:____________________.

7 Груз массой 0,58 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v=v_0\cos\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T=2$ с — период колебаний, $v_0=2$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E=\frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 50 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

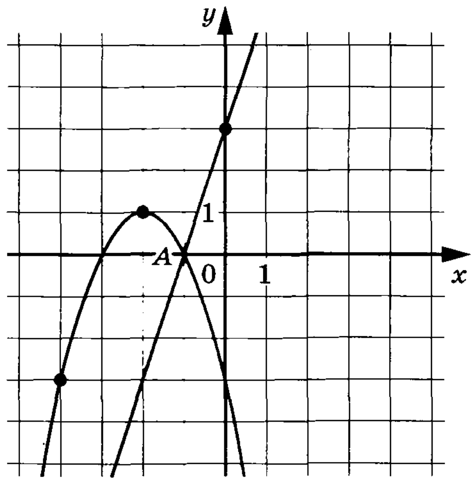
Ответ:____________________.

8 Лодка в 5:00 вышла из пункта А в пункт В, расположенный в 30 км от А. Пробыв 2 часа в пункте В, лодка отправилась назад и вернулась в пункт А в 23:00 того же дня. Определите (в км/ч) скорость течения реки, если известно, что собственная скорость лодки равна 4 км/ч.

Ответ:____________________.

9 На рисунке изображены графики функций $f(x)=3x+3$ и $g(x)=ax^2+bx+c$, которые пересекаются в точках $A(-1;\ 0)$ и $B(x_0;\ y_0)$. Найдите y_0.

Ответ:____________________.



10 Биатлонист 5 раз стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 3 раза попал в мишени, а последние 2 раза промахнулся. Результат округлите до сотых.

Ответ:____________________.

11 Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 8{,}5x^2 + 10x - 13$.

Ответ:____________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\cos 2x + \sin 2x + 1 = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

13 В правильной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$ боковое ребро равно 2, а сторона основания равна $\sqrt{6}$. Через точку A_1 перпендикулярно плоскости AB_1D_1 проведена прямая l.

а) Докажите, что прямая l пересекает отрезок AC и делит его в отношении $2:1$.

б) Найдите угол между прямыми l и CD_1.

14 Решите неравенство $5^{\log_{\frac{1}{5}} \log_3(-2x)} < 3^{\log_{\frac{1}{3}} \log_5(-2x)}$.

15 В июле 2023 года планируется взять кредит на 8 лет в размере 800 тыс. рублей. Условия возврата таковы:
- каждый январь с 2024 по 2027 год долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;
- каждый январь с 2028 по 2031 год долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если общая сумма выплат по кредиту должна составить 1444 тыс. рублей.

16 Около окружности с центром O описана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC.

а) Докажите, что треугольник AOB прямоугольный.

б) Найдите отношение большего основания трапеции к меньшему, если известно, что $AB = CD$, а площадь четырёхугольника с вершинами в точках касания окружности со сторонами трапеции составляет $\frac{16}{81}$ площади трапеции $ABCD$.

17 Найдите все такие значения a, при каждом из которых неравенство

$$-1 \le \cos x(\cos 2x - a - 1) \le 1$$

верно при всех действительных значениях x.

18 Отношение трёхзначного натурального числа к сумме его цифр — целое число.

а) Может ли это отношение быть равным 11?

б) Может ли это отношение быть равным 5?

в) Какое наибольшее значение может принимать это отношение, если число не делится на 100 и его первая цифра равна 7?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 7

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

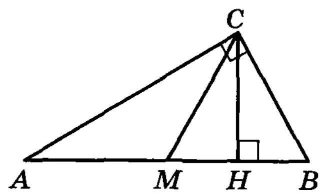
1 Найдите корень уравнения $\log_9 3^{2x+9} = 2$.

Ответ:__________________.

2 Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 шашистов, среди которых 3 спортсмена из России, в том числе Василий Лукин. Найдите вероятность того, что в первом туре Василий Лукин будет играть с каким-либо шашистом из России.

Ответ:__________________.

3 Острый угол B прямоугольного треугольника равен 50°. Найдите угол между высотой CH и медианой CM, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

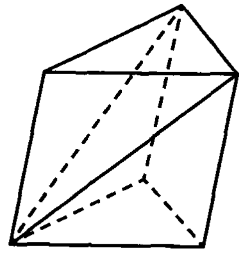


Ответ:__________________.

4 Найдите значение выражения $\dfrac{a^{5,96} \cdot a^{2,4}}{a^{5,36}}$ при $a = 6$.

Ответ:__________________.

5 От треугольной призмы, объём которой равен 120, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объём оставшейся части.



Ответ:__________________.

6 Прямая $y = 5x + 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 4x^2 + 9x + 11$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:__________________.

7 Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 24 км. К пляжу ведёт лестница, каждая ступенька которой имеет высоту 20 см. На какое наименьшее количество ступенек нужно подняться человеку, чтобы он увидел горизонт на расстоянии не менее 32 км?

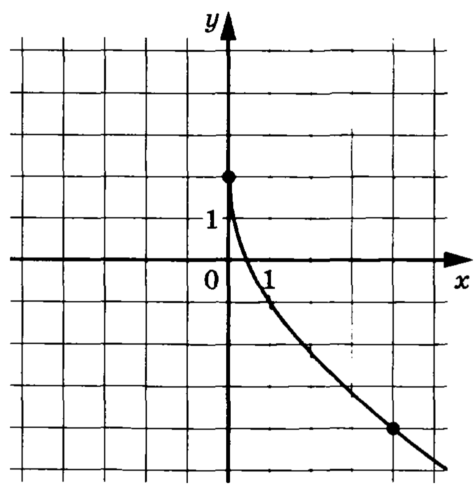
Ответ:__________________.

8 Первый садовый насос перекачивает 8 литров воды за 4 минуты, второй насос перекачивает тот же объём воды за 6 минут. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 60 литров воды?

Ответ:__________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x} + p$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -10$.

Ответ:__________________.



10 Игральный кубик бросают дважды. Известно, что в сумме выпало 6 очков. Найдите вероятность того, что в первый раз выпало 2 очка.

Ответ:__________________.

11 Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+25)^{11} - 11x + 5$.

Ответ:__________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $5\sin x - 4\sin^3 x = 2\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

13 Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Высота пирамиды проходит через точку B.

а) Докажите, что середина ребра SA равноудалена от вершин B и C.

б) Найдите угол между плоскостью SBC и прямой, проходящей через середины рёбер BC и SA, если известно, что $BS = AC$.

14 Решите неравенство $\log_2^2(x^4) - 4\log_{0,25}(x^2) \geq 12$.

15 Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 2x^2 + 5x + 10$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через 12 лет суммарная прибыль может составить не менее 744 млн рублей при некотором значении x?

16 Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC.

а) Докажите, что окружности, описанные около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1 пересекаются в одной точке.

б) Известно, что $AB = AC = 13$ и $BC = 10$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершины которого — центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-2a+2)^2+(y+a-2)^2=a+\dfrac{5}{2},\\ x+y=1-a\end{cases}$$

имеет единственное решение.

18 Для действительного числа x обозначим через $[x]$ наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $\left[\frac{11}{4}\right]=2$, так как $2\le\frac{11}{4}<3$.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{7}\right]=n$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]=n+2$?

в) Сколько существует различных натуральных n, для которых $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{17}\right]=n+1945$?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 8

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

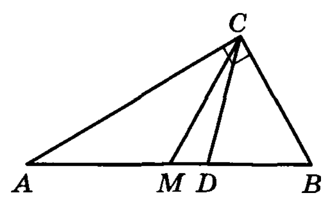
1 Найдите корень уравнения $\log_4 2^{5x+7} = 3$.

Ответ:___________________.

2 Перед началом первого тура чемпионата по шахматам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 16 шахматистов, среди которых 4 спортсмена из России, в том числе Фёдор Волков. Найдите вероятность того, что в первом туре Фёдор Волков будет играть с каким-либо шахматистом из России.

Ответ:___________________.

3 Угол между биссектрисой CD и медианой CM проведёнными из вершины прямого угла C треугольника ABC, равен 10°. Найдите меньший угол этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

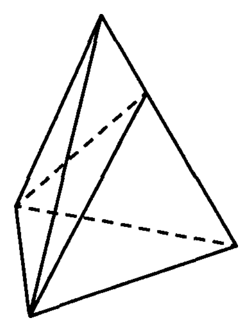


Ответ:___________________.

4 Найдите значение выражения $\dfrac{a^{3,33}}{a^{2,11} \cdot a^{2,22}}$ при $a = \dfrac{2}{7}$.

Ответ:___________________.

5 Объём треугольной пирамиды равен 14. Плоскость проходит через сторону основания этой пирамиды и пересекает противоположное боковое ребро в точке, делящей его в отношении 2 : 5, считая от вершины пирамиды. Найдите больший из объёмов пирамид, на которые плоскость разбивает исходную пирамиду.



Ответ:___________________.

6 Прямая $y = 9x + 6$ является касательной к графику функции $y = ax^2 - 19x + 13$. Найдите a.

Ответ:___________________.

7 Расстояние от наблюдателя, находящегося на высоте h м над землёй, выраженное в километрах, до видимой им линии горизонта вычисляется по формуле $l = \sqrt{\frac{Rh}{500}}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Человек, стоящий на пляже, видит горизонт на расстоянии 4 км. На сколько метров нужно подняться человеку, чтобы расстояние до горизонта увеличилось до 24 км?

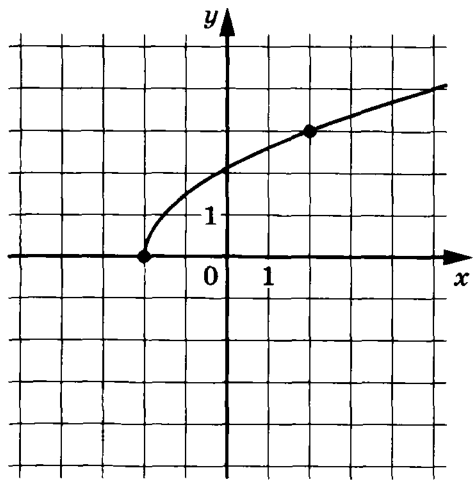
Ответ:___________________.

8 Первый садовый насос перекачивает 10 литров воды за 5 минут, второй насос перекачивает тот же объём воды за 7 минут. Сколько минут эти два насоса должны работать совместно, чтобы перекачать 72 литра воды?

Ответ:___________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x+p}$. Найдите $f(0{,}25)$.

Ответ:___________________.



10 Игральный кубик бросили один или несколько раз. Оказалось, что сумма всех выпавших очков равна 3. Какова вероятность того, что было сделано два броска? Ответ округлите до сотых.

Ответ:___________________.

11 Найдите наибольшее значение функции $y = 2x^2 - 12x + 8\ln x - 5$ на отрезке $\left[\frac{12}{13}; \frac{14}{13}\right]$.

Ответ:___________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $7\cos x - 4\cos^3 x = 2\sqrt{3}\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-4\pi; -3\pi]$.

13 Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Высота пирамиды проходит через точку B.

а) Докажите, что середина ребра SA равноудалена от вершин B и C.

б) Найдите угол между плоскостью SBC и прямой, проходящей через середины рёбер BC и SA, если известно, что $BS = 2AC$.

14 Решите неравенство $\log_5^2(x^4) - 28\log_{0,04}(x^2) \le 8$.

15 Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 3x^2 + 6x + 13$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через пять лет суммарная прибыль может составить не менее 70 млн рублей при некотором значении x?

16 Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC.

а) Докажите, что окружности, описанные около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1, пересекаются в одной точке.

б) Известно, что $AB = AC = 17$ и $BC = 16$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершины которого — центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-a+3)^2+(y+a-2)^2=a+\dfrac{7}{2},\\ x-y=a-1\end{cases}$$

имеет единственное решение.

18 Для действительного числа x обозначим через $[x]$ наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $\left[\frac{11}{4}\right]=2$, так как $2\le\frac{11}{4}<3$.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]=n$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]=n+2$?

в) Сколько существует различных натуральных n, для которых $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{8}\right]+\left[\frac{n}{23}\right]=n+2021$?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 9

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Решите уравнение $\operatorname{tg}\frac{\pi(2x+5)}{6}=\sqrt{3}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Ответ:_________________.

2 Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 7, но не дойдя до отметки 10.

Ответ:_________________.

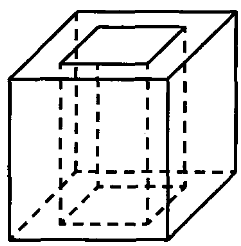
3 Сторона ромба равна 10, острый угол равен 30°. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

Ответ:_________________.

4 Найдите $\frac{g(10-x)}{g(10+x)}$, если $g(x)=\sqrt[3]{x(20-x)}$, при $|x|\neq 10$.

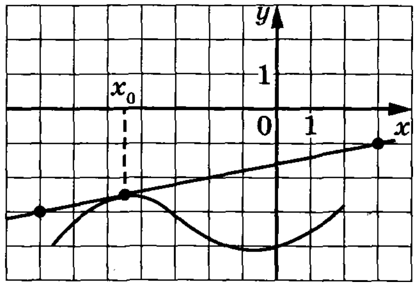
Ответ:_________________.

5 Из единичного куба вырезана правильная четырёхугольная призма со стороной основания 0,4 и боковым ребром 1. Найдите площадь поверхности оставшейся части куба.



Ответ:_________________.

6 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:____________________.

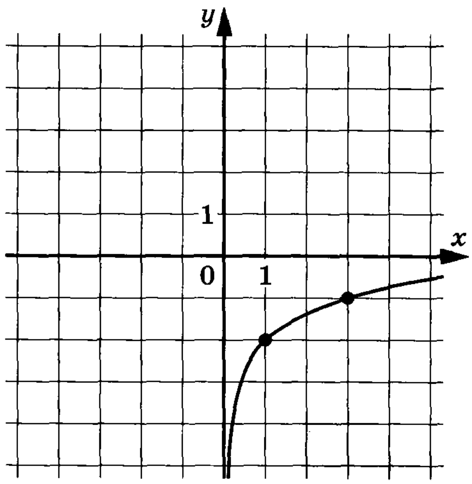
7 Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega) = \frac{A_0\omega_p^2}{|\omega_p^2 - \omega^2|}$, где ω — частота вынуждающей силы (в $с^{-1}$), A_0 — постоянный параметр, $\omega_p = 345$ $с^{-1}$ — резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω, меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на 12,5 %. Ответ дайте в $с^{-1}$.

Ответ:____________________.

8 Расстояние между городами A и B равно 180 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 3 часа следом за ним со скоростью 90 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C. Ответ дайте в километрах.

Ответ:____________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = b + \log_a x$. Найдите $f(81)$.



Ответ:____________________.

10 Помещение освещается фонарём с тремя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ:____________________.

11 Найдите точку максимума функции $y=(x+35)e^{35-x}$.

Ответ:___________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $16\log_9^2 x+4\log_{\frac{1}{3}} x-3=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [0,5; 5].

13 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка K — середина ребра AA_1, а $AB=AA_1$. Плоскость α проходит через точки K и B_1 параллельно прямой BC_1.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро A_1C_1 в отношении $1:2$.

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости α, если $AB=6$.

14 Решите неравенство $25\cdot 4^{\frac{1}{2}-\frac{2}{x}}-133\cdot 10^{-\frac{2}{x}}+4\cdot 5^{1-\frac{4}{x}}\le 0$.

15 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 650 тыс. рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:
- в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 19 % по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

16 В трапеции $ABCD$ основание AD в два раза меньше основания BC. Внутри трапеции взяли точку M так, что углы BAM и CDM прямые.

а) Докажите, что $BM = CM$.

б) Найдите угол ABC, если угол BCD равен $64°$, а расстояние от точки M до прямой BC равно стороне AD.

17 Найдите все такие значения a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{5-7x}\cdot\ln\left(9x^2-a^2\right)=\sqrt{5-7x}\cdot\ln(3x+a)$$

имеет ровно один корень.

18 На доске написано 11 различных натуральных чисел. Среднее арифметическое шести наименьших из них равно 8, а среднее арифметическое семи наибольших равно 14.

а) Может ли наибольшее из этих одиннадцати чисел равняться 16?

б) Может ли среднее арифметическое всех одиннадцати чисел равняться 10?

в) Найдите наименьшее значение среднего арифметического всех одиннадцати чисел.

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 10

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Решите уравнение $\sin\frac{\pi(2x+7)}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Ответ:___________________.

2 Механические часы с двенадцатичасовым циферблатом в какой-то момент сломались и перестали идти. Найдите вероятность того, что часовая стрелка остановилась, достигнув отметки 2, но не дойдя до отметки 11.

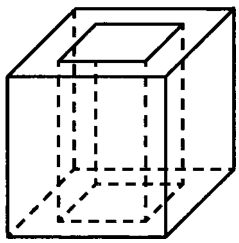
Ответ:___________________.

3 Радиус окружности, вписанной в ромб, равен 1,5. Найдите сторону ромба, если один из его углов равен 30°.

Ответ:___________________.

4 Найдите $5(4p(x+2)-p(4x))$, если $p(x)=x-2$.

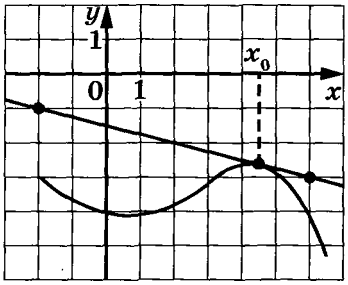
Ответ:___________________.



5 Из единичного куба вырезана правильная четырёхугольная призма со стороной основания 0,6 и боковым ребром 1. Найдите площадь поверхности оставшейся части куба.

Ответ:___________________.

6 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:___________________.

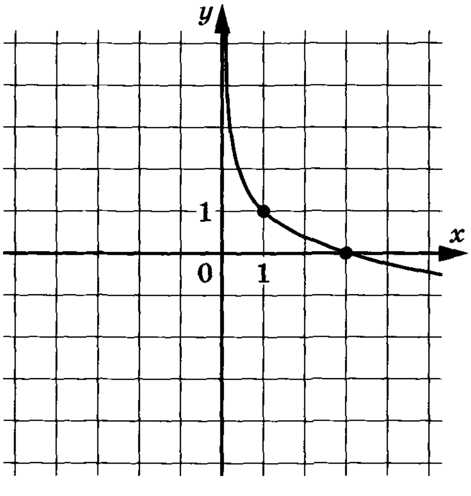
7 Амплитуда колебаний маятника зависит от частоты вынуждающей силы и определяется по формуле $A(\omega)=\dfrac{A_0\omega_p^2}{\left|\omega_p^2-\omega^2\right|}$, где ω — частота вынуждающей силы (в $с^{-1}$), A_0 — постоянный параметр, $\omega_p=330$ $с^{-1}$ — резонансная частота. Найдите максимальную частоту ω, меньшую резонансной, для которой амплитуда колебаний превосходит величину A_0 не более чем на 80 %. Ответ дайте в $с^{-1}$.

Ответ:___________________.

8 Расстояние между городами A и B равно 84 км. Из города A в город B выехал автомобиль, а через 30 минут следом за ним со скоростью 65 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе C и повернул обратно. Когда он вернулся в A, автомобиль прибыл в B. Найдите расстояние от A до C. Ответ дайте в километрах.

Ответ:___________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x)=b+\log_a x$. Найдите значение x, при котором $f(x)=-2$.



Ответ:___________________.

10 Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,16. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ:____________________.

11 Найдите наименьшее значение функции $y=(x+4)^2 e^{-4-x}$ на отрезке [−5; −3].

Ответ:____________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $36\log^2_{\frac{1}{8}} x+4\log_{\frac{1}{4}} x-5=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [0,5; 5].

13 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки K и N — соответственно середины рёбер AA_1 и AC. Плоскость α проходит через точки K и N параллельно прямой CB_1.

а) Докажите, что сечением призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью α является равнобедренная трапеция.

б) Найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью α, если $AB=4$, $AA_1=\sqrt{3}$.

14 Решите неравенство $4\cdot 9^{1-\frac{5}{x}}-91\cdot 12^{-\frac{5}{x}}+3\cdot 4^{2-\frac{10}{x}}\ge 0$.

15 В июле 2023 года планируется взять кредит на 12 лет в размере 1200 тыс. рублей. Условия возврата таковы:
- каждый январь с 2024 по 2029 год долг возрастает на 18 % по сравнению с концом предыдущего года;
- каждый январь с 2030 по 2035 год долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2035 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

16 Точка K лежит на отрезке AB. Прямая, проходящая через точку B, касается окружности с диаметром AK в точке N и второй раз пересекает окружность с диаметром BK в точке M. Продолжение отрезка NK пересекает окружность с диаметром BK в точке P.

а) Докажите, что прямые AN и BP параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKP, если $BM = 1$ и $MN = 4$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(7x-6)\cdot\ln(x+a)=(7x-6)\cdot\ln(4x-a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

18 На доске написано более 35, но менее 49 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 14, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -7.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 11

Часть 1

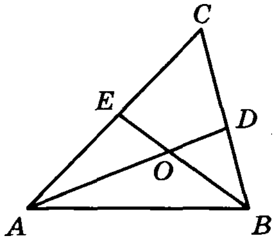
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите корень уравнения $\frac{1}{2x-3}=\frac{1}{8}$.

Ответ:__________________.

2 В классе 16 учащихся, среди них два друга — Михаил и Андрей. Класс случайным образом разбивают на 4 равные группы. Найдите вероятность того, что Михаил и Андрей окажутся в одной группе.

3 В треугольнике ABC угол C равен 46°, AD и BE — биссектрисы, пересекающиеся в точке O. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Ответ:__________________.

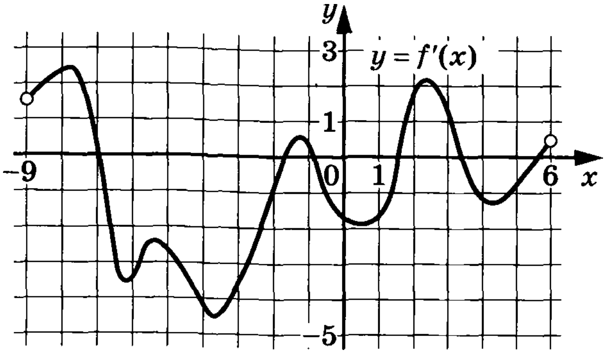
4 Найдите значение выражения $4^{1-2\log_{0,5}3}$.

Ответ:__________________.

5 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми DC_1 и BD. Ответ дайте в градусах.

Ответ:__________________.

6 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 6)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-8; 5]$.



Ответ:___________________.

7 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a (в км/ч^2). Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,8 км, приобрести скорость 100 км/ч. Ответ дайте в км/ч^2.

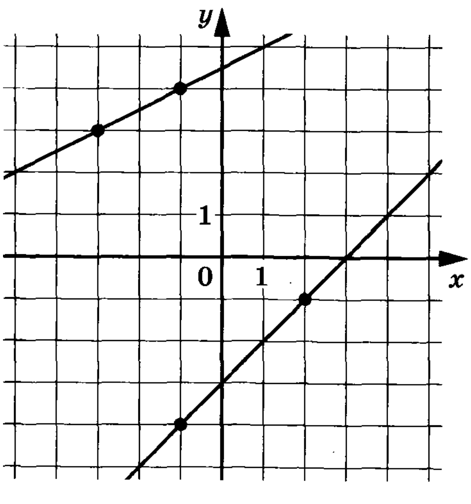
Ответ:___________________.

8 Катер в 8:40 вышел из пункта A в пункт B, расположенный в 48 км от A. Пробыв 40 минут в пункте B, катер отправился назад и вернулся в пункт A в 16:20 того же дня. Найдите собственную скорость катера (в км/ч), если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

Ответ:___________________.

9 На рисунке изображены графики двух функций вида $y = kx + b$, которые пересекаются в точке $A(x_0; y_0)$. Найдите x_0.

Ответ:___________________.



10 В классе 26 учащихся, среди них три подружки — Оля, Аня и Юля. Класс случайным образом разбивают на две равные группы. Найдите вероятность того, что все три девочки окажутся в одной группе.

Ответ:____________________.

11 Найдите наименьшее значение функции $y=4\sin x-6x+7$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2};\ 0\right]$.

Ответ:____________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin 2x=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\ \frac{9\pi}{2}\right]$.

13 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 2, а боковое ребро SA равно 8. Точка M — середина ребра AB. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и D. Прямая SC пересекает плоскость α в точке K.

а) Докажите, что $KM=KD$.

б) Найдите объём пирамиды $CDKM$.

14 Решите неравенство $x^2\log_{64}(3-2x)\geq\log_2\left(4x^2-12x+9\right)$.

15 В июле 2022 года планируется взять кредит на пять лет в размере 1050 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2023, 2024 и 2025 годов долг остаётся равным 1050 тыс. рублей;
- выплаты в 2026 и 2027 годах равны;
- к июлю 2027 года долг будет выплачен полностью.

На сколько рублей последняя выплата будет больше первой?

16 Две окружности касаются внутренним образом в точке C. Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает бо́льшую окружность в точке E, а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.

б) Найдите AC, если радиусы окружностей равны 3 и 4.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{16-y^2}=\sqrt{16-a^2x^2}, \\ x^2+y^2=8x+4y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

18 На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 3, к каждому числу из второй группы — цифру 7, а числа из третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 8 раз?

б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 17 раз?

в) В какое наибольшее число раз могла увеличиться сумма всех этих чисел?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 12

Часть 1

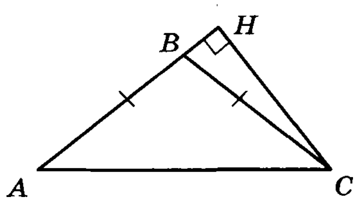
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите корень уравнения $\frac{1}{5x-14}=\frac{1}{4x-3}$.

Ответ:__________________.

2 Всего в группе туристов 21 человек, в том числе Женя и Саша. Группу случайным образом делят на три подгруппы по 7 человек для посадки в три микроавтобуса. Какова вероятность того, что Женя и Саша случайно окажутся в одном микроавтобусе?

3 В треугольнике ABC высота CH равна 6, $AB = BC$, $AC = 8$. Найдите синус угла ACB.



Ответ:__________________.

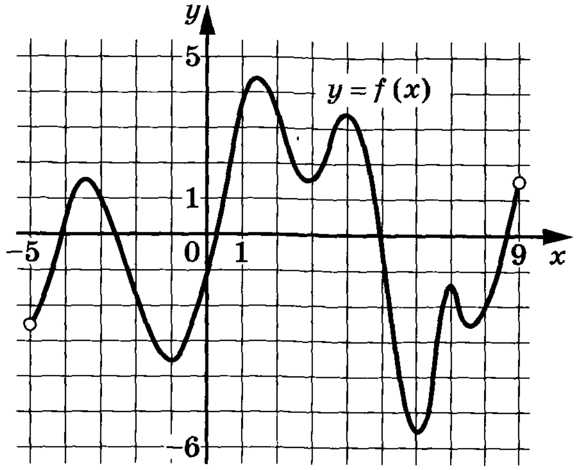
4 Найдите значение выражения $\frac{\log_9 32}{\log_{27} 0{,}5}$.

Ответ:__________________.

5 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 2, найдите угол между прямыми BB_1 и AC_1. Ответ дайте в градусах.

Ответ:__________________.

6 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-5; 9)$. Найдите количество решений уравнения $f'(x) = 0$ на отрезке $[-2; 8]$.



Ответ:__________________.

7 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением $a = 6500$ км/ч^2. Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите, сколько километров проедет автомобиль к моменту, когда он разгонится до скорости 130 км/ч.

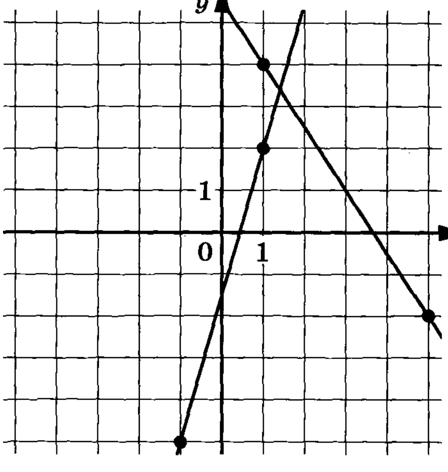
Ответ:__________________.

8 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 416 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 21 км/ч, стоянка длится 8 часов, а в пункт отправления теплоход возвращается через 50 часов. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:__________________.

9 На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.

Ответ:__________________.



10 В группе туристов 15 человек, в том числе три друга — Юра, Боря и Егор. Группу случайным образом разбивают на три равные подгруппы. Найдите вероятность того, что все трое окажутся в разных подгруппах. Ответ округлите до сотых.

Ответ:__________________.

11 Найдите точку максимума функции $y=(5x-6)\cos x-5\sin x-8$, принадлежащую промежутку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ:__________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\cos 2x-\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

13 В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=8$ и $BC=6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA=\sqrt{21}$, $SB=\sqrt{85}$, $SD=\sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA — высота пирамиды.
б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

14 Решите неравенство $x^2\log_{243}(-x-3)\geq\log_3\left(x^2+6x+9\right)$.

15 В июле 2022 года планируется взять кредит на пять лет в размере 220 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2023, 2024 и 2025 годов долг остаётся равным 220 тыс. рублей;
- выплаты в 2026 и 2027 годах равны;
- к июлю 2027 года долг будет выплачен полностью.

Найдите r, если известно, что долг будет выплачен полностью и общий размер выплат составит 420 тыс. рублей.

16 Две окружности разных радиусов касаются внешним образом в точке C. Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает бо́льшую окружность в точке E, а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.

б) Найдите BC, если радиусы окружностей равны $\sqrt{15}$ и 15.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{a-y^2}=\sqrt{a-x^2}, \\ x^2+y^2=2x+4y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

18 На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 1, к каждому числу из второй группы — цифру 8, а числа из третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 4 раза?

б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 18 раз?

в) Сумма всех этих чисел увеличилась в 11 раз. Какое наибольшее количество чисел могло быть написано на доске?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 13

Часть 1

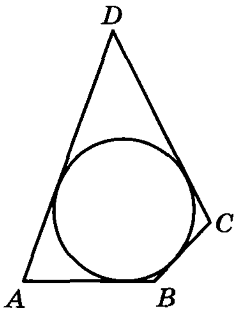
Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите корень уравнения $\log_3(2-x)=\log_9 16$.

Ответ:___________________.

2 В гонке с раздельным стартом участвуют 25 лыжников, среди которых 7 спортсменов из Норвегии. Порядок старта определяется с помощью жребия случайным образом. Один из норвежских лыжников получил стартовый номер «5». Найдите вероятность, что он будет стартовать за своим соотечественником.

3 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=13$, $CD=18$. Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$.



Ответ:___________________.

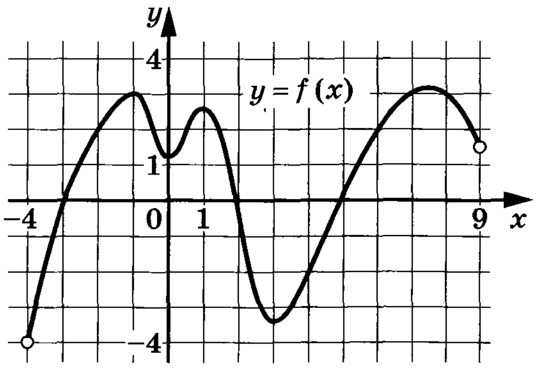
4 Найдите значение выражения $\dfrac{8^{2,8}\cdot 5^{3,2}}{20^{2,2}}$.

Ответ:___________________.

5 Радиусы двух шаров равны 7 и 24. Найдите радиус шара, площадь поверхности которого равна сумме площадей поверхностей двух данных шаров.

Ответ:___________________.

6 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-4; 9)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции положительна.



Ответ:____________________.

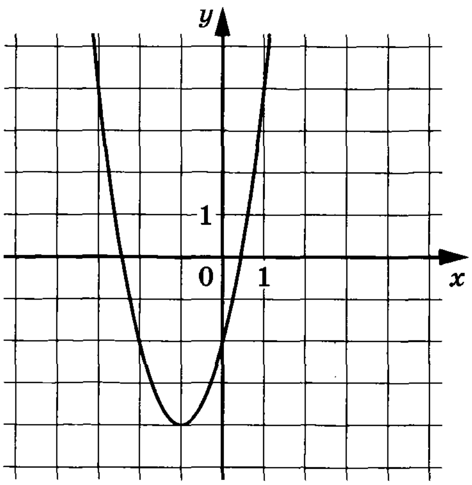
7 Небольшой мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Максимальная высота полёта мячика H (в м) вычисляется по формуле $H = \frac{v_0^2}{4g}(1 - \cos 2\alpha)$, где $v_0 = 12$ м/с — начальная скорость мячика, а g — ускорение свободного падения (считайте $g = 10$ м/с^2). При каком наименьшем значении угла α мячик пролетит над стеной высотой 4,4 м на расстоянии 1 м? Ответ дайте в градусах.

Ответ:____________________.

8 Имеется два сплава. Первый содержит 50 % никеля, второй — 15 % никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 175 кг, содержащий 25 % никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Ответ:____________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = 2x^2 + bx + c$, где числа b и c — целые. Найдите $f(-5)$.



Ответ:____________________.

10 Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 95 % яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 45 % яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 60 % яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Ответ:___________________.

11 Найдите наибольшее значение функции $y=3x^5-5x^3+16$ на отрезке $[-4;\ 0]$.

Ответ:___________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $(x^2+2x+1)\left(\log_2(x^2-3)+\log_{0,5}(\sqrt{3}-x)\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2,5;\ -1,5]$.

13 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно $\sqrt{21}$. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=4$, $SK:KB=1:3$.

а) Докажите, что плоскость CKM перпендикулярна плоскости ABC.
б) Найдите объём пирамиды $BCKM$.

14 Решите неравенство $\dfrac{4^{x-0,5}+1}{9\cdot 4^x-16^{x+0,5}-2}\le 0,5$.

15 Алексей планирует 15 декабря взять в банке кредит на 2 года в размере 1 806 000 рублей. Сотрудник банка предложил Алексею два различных варианта погашения кредита, описание которых приведено в таблице.

Вариант 1	– каждый январь долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года; – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; – кредит должен быть полностью погашен за два года двумя равными платежами
Вариант 2	– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца; – со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; – 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца; – к 15-му числу 24-го месяца кредит должен быть полностью погашен

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат банку по более выгодному для Алексея варианту погашения кредита?

16 В четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка O.

а) Докажите, что около четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность.

б) Найдите радиус вписанной окружности, если $AC = 10$, $BD = 26$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{5}{x}+3-y=\left|y-2+\frac{3}{x}\right|, \\ 2y(y-4)+3x(ax+4)=xy(2a+3) \end{cases}$$

имеет больше трёх решений.

18 Петя участвовал в викторине по истории. За каждый правильный ответ участнику начисляется 8 баллов, за каждый неверный — списывается 8 баллов, за отсутствие ответа списывается 3 балла. По результатам викторины Петя набрал 35 баллов.

а) На сколько вопросов Петя не дал ответа, если в викторине было 30 вопросов?

б) На сколько вопросов Петя не дал ответа, если в викторине было 35 вопросов?

в) На сколько вопросов Петя ответил правильно, если в викторине было 33 вопроса?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 14

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

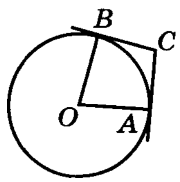
1 Найдите корень уравнения $\log_{0,5}(x+5)=\log_2 0{,}2$.

Ответ:____________________.

2 В гонке с раздельным стартом участвуют 16 лыжников, среди которых 4 спортсмена из Швеции. Порядок старта определяется с помощью жребия случайным образом. Один из шведских лыжников получил стартовый номер «10». Найдите вероятность, что он будет стартовать за своим соотечественником.

Ответ:____________________.

3 Через концы A и B дуги окружности с центром O проведены касательные CA и CB. Угол CAB равен 39°. Найдите угол AOB. Ответ дайте в градусах.



Ответ:____________________.

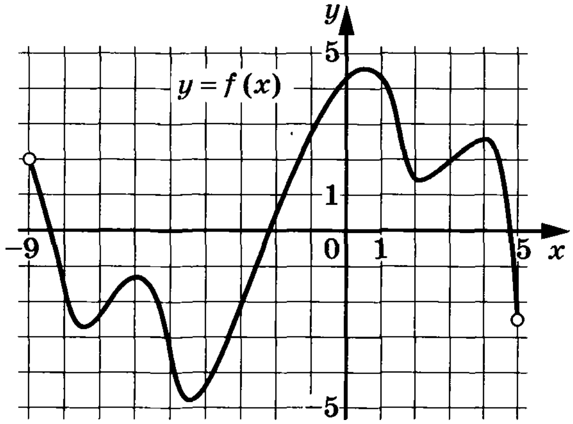
4 Найдите значение выражения $\dfrac{14^{6,4}\cdot 7^{-5,4}}{4^{2,2}}$.

Ответ:____________________.

5 Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 60. Найдите объём треугольной пирамиды ACB_1D_1.

Ответ:____________________.

6 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-9; 5)$. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ равна 0.



Ответ:__________________.

7 Мяч бросили под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$. При каком значении угла α (в градусах) время полёта составит 1,4 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 14$ м/с^2. Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

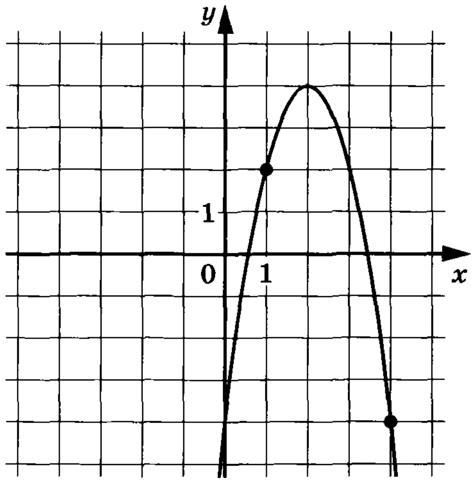
Ответ:__________________.

8 Смешали 3 кг 24-процентного раствора, 4 кг 32-процентного раствора и некоторое количество 48-процентного раствора одного и того же вещества. Сколько килограммов 48-процентного раствора использовали, если в результате получили 40-процентный раствор вещества?

Ответ:__________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + 8x + c$. Найдите $f(6)$.

Ответ:__________________.



10 На фабрике керамической посуды 30 % произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 50 % дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Ответ округлите до сотых.

Ответ:____________________.

11 Найдите точку минимума функции $y=(x+4)^2(x+1)+9$.

Ответ:____________________.

!

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\left(x^2+4x+2\right)\left(4^{3x+1}+8^{2x-1}-11\right)=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-0{,}5;\ 0{,}5]$.

13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 8, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SB отмечены точки M и K соответственно, причём $AM=2$, $SK=1$. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и K.

а) Докажите, что плоскость α содержит точку C.

б) Найдите площадь сечения пирамиды $SABCD$ плоскостью α.

14 Решите неравенство $\lg^4(x^2-26)^4-4\lg^2(x^2-26)^2\le 240$.

15 Виктор планирует 15 декабря взять в банке кредит на 2 года в размере 1 962 000 рублей. Сотрудник банка предложил Виктору два различных варианта погашения кредита, описание которых приведено в таблице.

Вариант 1	– каждый январь долг возрастает на 18 % по сравнению с концом предыдущего года; – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; – кредит должен быть полностью погашен за два года двумя равными платежами
Вариант 2	– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца; – со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; – 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца; – к 15-му числу 24-го месяца кредит должен быть полностью погашен

На сколько рублей меньше окажется общая сумма выплат банку по более выгодному для Виктора варианту погашения кредита?

16 В четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны не параллельны. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O под прямым углом и образуют четыре подобных треугольника, у каждого из которых одна из вершин — точка O.

а) Докажите, что в четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность.

б) Найдите радиус вписанной окружности, если $AC = 12$, $BD = 13$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y+2-\dfrac{4}{x}=\left|y+\dfrac{2}{x}-3\right|, \\ 2y(y+2)+3x(ax-2)=xy(2a+3) \end{cases}$$

имеет больше трёх решений.

18 Оля участвовала в викторине по истории. За каждый правильный ответ участнику начисляется 8 баллов, за каждый неверный — списывается 8 баллов, за отсутствие ответа списывается 3 балла. По результатам викторины Оля набрала 35 баллов.

а) На сколько вопросов Оля ответила правильно, если в викторине было 24 вопроса?

б) На сколько вопросов Оля не дала ответа, если в викторине было 25 вопросов?

в) На сколько вопросов Оля ответила неверно, если в викторине было 37 вопросов?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 15

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

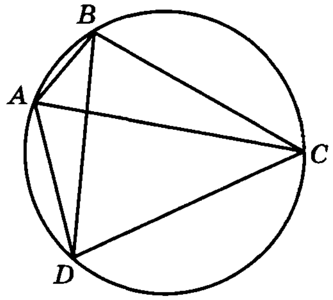
1 Найдите корень уравнения $\sqrt{5x} = 2\frac{1}{2}x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите больший из корней.

Ответ:___________________.

2 В магазине в одной коробке лежат вперемешку ручки с чёрными, синими и красными чернилами, одинаковые на вид. Покупатель случайным образом выбирает одну ручку. Вероятность того, что она окажется чёрной, равна 0,37, а того, что она окажется синей, равна 0,45. Найдите вероятность того, что ручка окажется красной.

Ответ:___________________.

3 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 106°, угол CAD равен 69°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.



Ответ:___________________.

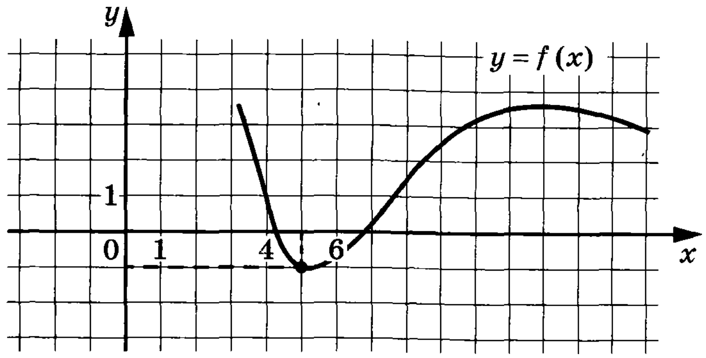
4 Найдите значение выражения $\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Ответ:___________________.

5 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 9$, $BC = 6$, $AA_1 = 5$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, D, A_1, B_1.

Ответ:___________________.

6 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 5. Найдите значение производной функции в точке $x_0 = 5$.



Ответ:____________________.

7 Установка для демонстрации адиабатического сжатия представляет собой сосуд с поршнем, резко сжимающим газ. При этом объём и давление связаны соотношением $p_1V_1^{1,4} = p_2V_2^{1,4}$, где p_1 и p_2 — давление газа (в атмосферах) в начальном и конечном состояниях, V_1 и V_2 — объём газа (в литрах) в начальном и конечном состояниях. Изначально объём газа равен 192 л, а давление газа равно одной атмосфере. До какого объёма нужно сжать газ, чтобы давление в сосуде стало 128 атмосфер? Ответ дайте в литрах.

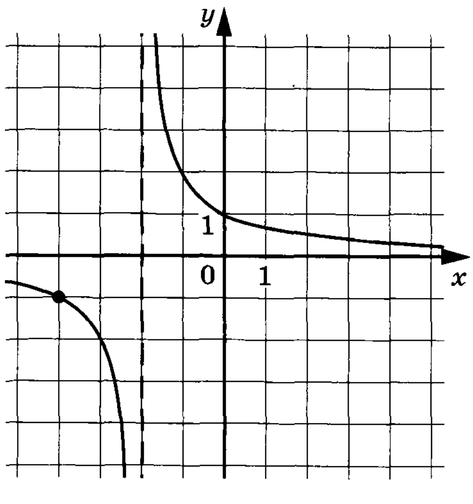
Ответ:____________________.

8 Две трубы, работая одновременно, наполняют бассейн за 18 часов 40 минут, а одна первая труба наполняет бассейн за 40 часов. За сколько часов наполняет бассейн одна вторая труба?

Ответ:____________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = \dfrac{k}{x+a}$. Найдите $f(-7)$.

Ответ:____________________.



10 Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,2 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,4?

Ответ:____________________.

11 Найдите точку максимума функции $y=-\dfrac{x^2+196}{x}$.

Ответ:____________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\sin^4\dfrac{x}{4}-\cos^4\dfrac{x}{4}=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2};\ \pi\right]$.

13 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро AA_1 равно $5\sqrt{3}$. На ребре DD_1 отмечена точка M так, что $DM:MD_1=3:2$. Плоскость α параллельна прямой A_1F_1 и проходит через точки M и E.

а) Докажите, что сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α — равнобедренная трапеция.
б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка F, а основанием — сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α.

14 Решите неравенство $(2\cdot 0{,}5^{x+2}-0{,}5\cdot 2^{x+2})(2\log^2_{0,5}(x+2)-0{,}5\log_2(x+2))\le 0$.

15 15 января планируется взять кредит в банке на 2 года. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за 15-й месяц кредитования нужно выплатить 44 тыс. рублей. Сколько рублей нужно будет вернуть банку в течение всего срока кредитования?

16 В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а угол BDC равен 75°. Точка P лежит вне прямоугольника, а угол APB равен 150°.

а) Докажите, что углы BAP и POB равны.

б) Прямая PO пересекает сторону CD в точке F. Найдите CF, если $AP=6\sqrt{3}$ и $BP=4$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых среди корней уравнения

$$3x^2-24x+64=a|x-3|$$

будет ровно три положительных.

18 У Миши в копилке есть 2-рублёвые, 5-рублёвые и 10-рублёвые монеты. Если взять 10 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 2-рублёвая. Если взять 15 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 5-рублёвая. Если взять 20 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 10-рублёвая.

а) Может ли у Миши быть 30 монет?

б) Какое наибольшее количество монет может быть у Миши?

в) Какая наибольшая сумма рублей может быть у Миши?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 16

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите корень уравнения $\sqrt{-x}=x+6$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

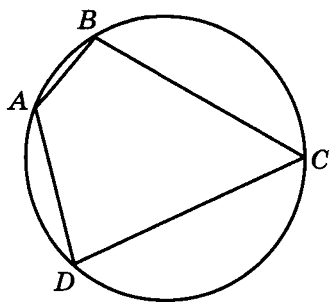
Ответ:__________________.

2 В магазине в одной коробке лежат вперемешку ручки с чёрными, синими и красными чернилами, одинаковые на вид. Покупатель случайным образом выбирает одну ручку. Вероятность того, что она окажется чёрной, равна 0,36, а того, что она окажется красной, равна 0,26. Найдите вероятность того, что ручка окажется синей.

Ответ:__________________.

3 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол BAD равен 127°. Найдите угол BCD. Ответ дайте в градусах.

Ответ:__________________.



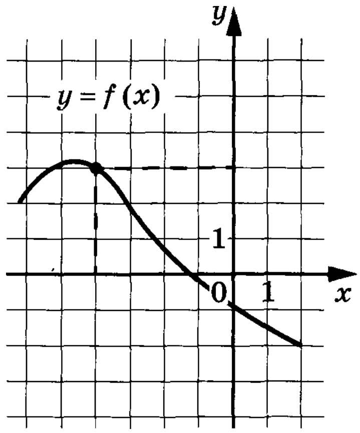
4 Найдите значение выражения $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{91}}{3}$ и $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

Ответ:__________________.

5 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=9$, $BC=8$, $AA_1=6$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1.

Ответ:__________________.

6 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой -4. Найдите значение производной функции в точке $x_0 = -4$.



Ответ:__________________.

7 Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 60$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 95 см до 115 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 140 см до 160 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

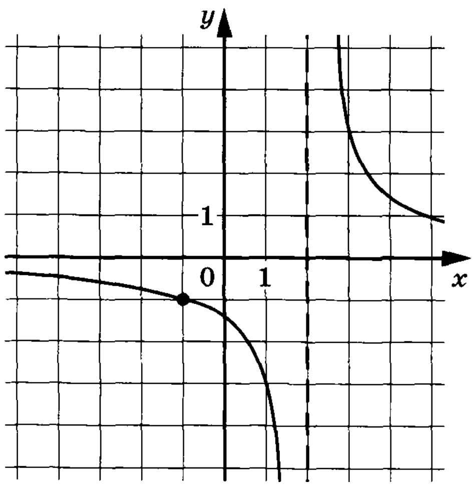
На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ:__________________.

8 Первый и второй насосы наполняют бассейн за 35 минут, второй и третий — за 40 минут, а первый и третий — за 56 минут. За сколько минут эти три насоса заполнят бассейн, работая вместе?

Ответ:__________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = \dfrac{k}{x+a}$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -0{,}2$.



Ответ:__________________.

10 Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,4 при каждом отдельном выстреле. Сколько патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не менее 0,9?

Ответ:__________________.

11 Найдите наибольшее значение функции $y=(x-6)e^{7-x}$ на отрезке $[2;\ 15]$.

Ответ:__________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\sin^2\left(\frac{x}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\sin^2\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=0{,}375\sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;\ \pi]$.

13 В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $5\sqrt{3}$. На ребре DD_1 отмечена точка M так, что $DM:MD_1=2:3$. Плоскость α параллельна прямой A_1F_1 и проходит через точки M и B.

а) Докажите, что сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α — равнобедренная трапеция.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка A_1, а основанием — сечение призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью α.

14 Решите неравенство $\left(5\cdot 0{,}2^{x+0{,}5}-0{,}2\cdot 5^{x+0{,}5}\right)\left(0{,}5\log^2_{0{,}2}(x+0{,}5)-2\log_5(x+0{,}5)\right)>0$.

15 15 января планируется взять кредит в банке на 3 года. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за 24-й месяц кредитования нужно выплатить 45,2 тыс. рублей. Сколько рублей нужно будет вернуть банку в течение всего срока кредитования?

16 В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, а угол BDC равен 22,5°. Точка P лежит вне прямоугольника, а угол BPC равен 135°.

а) Докажите, что углы BCP и POB равны.
б) Прямая PO пересекает сторону AD в точке F. Найдите DF, если $BP=7$ и $CP=5\sqrt{2}$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых среди корней уравнения

$$x^2-10x+35=a|x-6|$$

будет ровно два положительных.

18 У Коли в копилке есть 2-рублёвые, 5-рублёвые и 10-рублёвые монеты. Если взять 20 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 2-рублёвая. Если взять 25 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 5-рублёвая. Если взять 30 монет, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна 10-рублёвая.

а) Может ли у Коли быть 50 монет?
б) Какое наибольшее количество монет может быть у Коли?
в) Какая наибольшая сумма рублей может быть у Коли?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 17

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

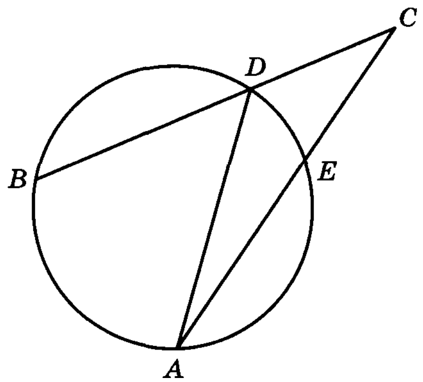
1 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2,5}=\frac{1}{8}$.

Ответ:___________________.

2 В случайном эксперименте бросают две игральные кости. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна 6. Результат округлите до сотых.

Ответ:___________________.

3 Градусная мера дуги AB окружности, не содержащей точку D, равна 106°. Градусная мера дуги DE окружности, не содержащей точку A, равна 48°. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.

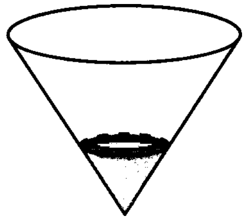


Ответ:___________________.

4 Найдите значение выражения $4\cos 4\alpha$, если $\sin 2\alpha=-0,4$.

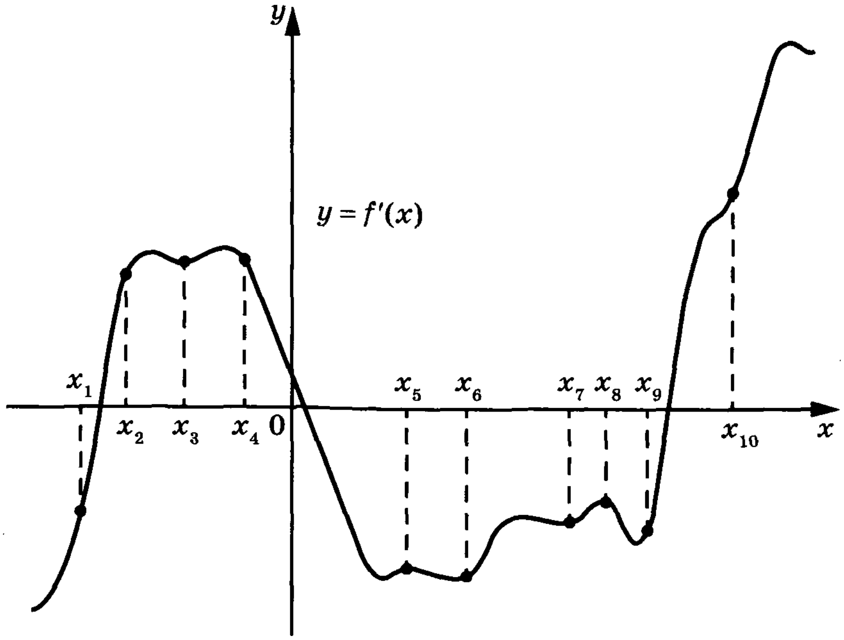
Ответ:___________________.

5 В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает 0,25 высоты. Объём жидкости равен 5 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



Ответ:___________________.

6 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечены 10 точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}. Сколько из этих точек лежит на промежутках убывания функции $f(x)$?



Ответ:_________________.

7 Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций. Каждый отдельный показатель — целое число от -1 до 1.

Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится вчетверо, а объективность — вдвое дороже, чем оперативность, то есть

$$R = \frac{4In + Op + 2Tr}{A}.$$

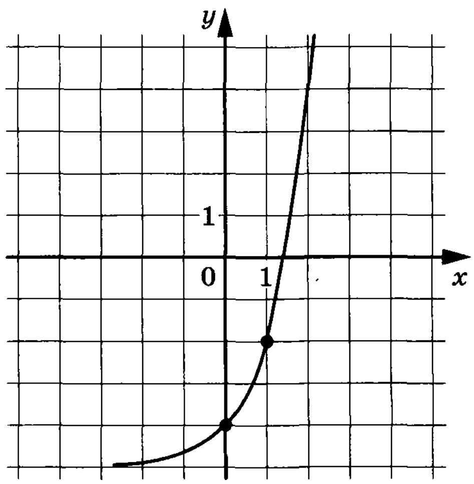
Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило рейтинг 1.

Ответ:_________________.

8 Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 63 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, большей скорости первого на 22 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:_________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите $f(4)$.



Ответ:___________________.

10 По отзывам покупателей Игорь Игоревич оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят вовремя из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят вовремя из магазина Б, равна 0,85. Игорь Игоревич заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар вовремя.

Ответ:___________________.

11 Найдите точку минимума функции $y = 11x - \ln(x+4)^{11} - 3$.

Ответ:___________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos 2x = \frac{\sin^2 x}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

13 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах A_1D_1 и DD_1 отмечены соответственно точки K и M так, что $A_1K = KD_1$, а $DM : MD_1 = 2 : 1$.

а) Докажите, что прямые MK и BK перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMK и BCC_1.

14 Решите неравенство $\dfrac{6\cdot 5^x - 11}{25^{x+0,5} - 6\cdot 5^x + 1} \geq 0{,}25$.

15 Александр хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года у Александра не было денег на покупку акций, а пакет стоил 100 000 рублей. В середине каждого месяца Александр откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму, а в конце месяца пакет дорожает, но не более чем на 30 %. Какую наименьшую сумму нужно откладывать Александру каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вне треугольника ABC построены равнобедренные прямоугольные треугольники AKC, ALB и BMC с прямыми углами K, L и M соответственно.

а) Докажите, что LC — высота треугольника KLM.

б) Найдите площадь треугольника KLM, если $LC = 4$.

17 Найдите, при каких неотрицательных значениях a функция $f(x) = 3ax^4 - 8x^3 + 3x^2 - 7$ на отрезке $[-1; 1]$ имеет ровно одну точку минимума.

18 Для каждого натурального числа n обозначим через $n!$ произведение первых n натуральных чисел ($1! = 1$).

а) Существует ли такое натуральное число n, что десятичная запись числа $n!$ оканчивается ровно 9 нулями?

б) Существует ли такое натуральное число n, что десятичная запись числа $n!$ оканчивается ровно 23 нулями?

в) Сколько существует натуральных чисел n, меньших 100, для каждого из которых десятичная запись числа $n!\cdot(100-n)!$ оканчивается ровно 23 нулями?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 18

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

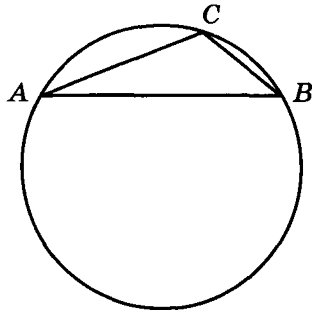
1 Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+5}=0{,}04$.

Ответ:____________________.

2 В случайном эксперименте симметричную монету бросают трижды. Найдите вероятность того, что орёл выпадет ровно один раз.

Ответ:____________________.

3 Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $2\sqrt{3}$. Найдите AB, если угол ACB равен $120°$.

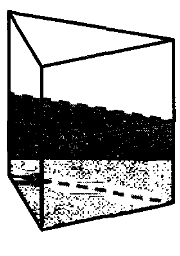


Ответ:____________________.

4 Найдите значение выражения $2\sqrt{6}\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{7\pi}{6}\operatorname{tg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

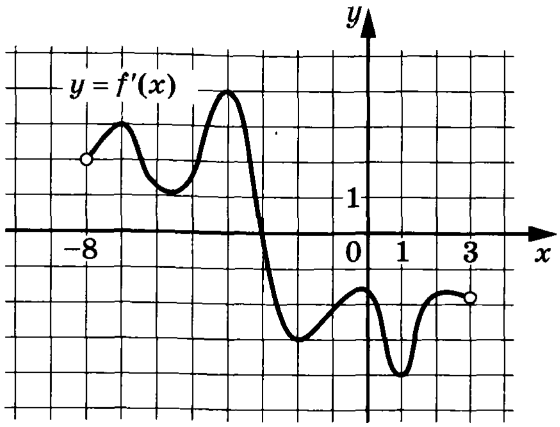
Ответ:____________________.

5 В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 1100 см^3 воды и полностью в неё погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся с отметки 25 см до отметки 29 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.



Ответ:____________________.

6 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-8; 3)$. В какой точке отрезка $[-5; 0]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ:___________________.

7 Независимое агентство намерено ввести рейтинг R новостных изданий на основе показателей информативности In, оперативности Op и объективности Tr публикаций, а также качества Q сайта. Каждый отдельный показатель — целое число от 0 до 4. Составители рейтинга считают, что информативность публикаций ценится вдвое, а объективность — втрое дороже, чем оперативность и качество сайта, то есть

$$R = \frac{2In + Op + 3Tr + Q}{A}.$$

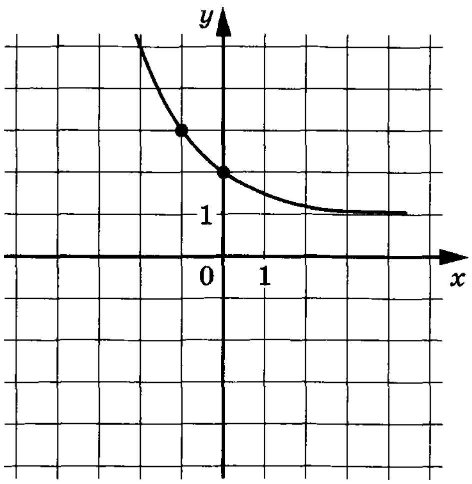
Найдите, каким должно быть число A, чтобы издание, у которого все показатели максимальны, получило рейтинг 1.

Ответ:___________________.

8 Дорога между пунктами A и B состоит из подъёма и спуска, а её длина равна 36 км. Путь из A в B занял у туриста 10 часов, из которых 2 часа ушло на спуск. Найдите скорость туриста на спуске, если она больше скорости на подъёме на 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:___________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 33.



Ответ:___________________.

10 По отзывам покупателей Пётр Петрович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят вовремя из магазина А, равна 0,92. Вероятность того, что этот товар доставят вовремя из магазина Б, равна 0,85. Пётр Петрович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар вовремя.

Ответ:____________________.

11 Найдите наибольшее значение функции $y=7\ln(x+5)-7x+10$ на отрезке $[-4{,}5;\ 0]$.

Ответ:____________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\cos 2x-\sin 2x=\cos x+\sin x+1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

13 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 3, а боковое ребро AA_1 равно $\sqrt{3}$. На рёбрах C_1D_1 и DD_1 отмечены соответственно точки K и M так, что $D_1K=KC_1$, а $DM:MD_1=1:3$.

а) Докажите, что прямые MK и BK перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMK и ABB_1.

14 Решите неравенство $\lg^4(x^2-4)^2-\lg^2(x^2-4)^4\geq 192$.

15 Сергей хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года у Сергея не было денег на покупку акций, а пакет стоил 160 000 рублей. В середине каждого месяца Сергей откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму, а в конце месяца пакет дорожает, но не более чем на 25 %. Какую наименьшую сумму нужно откладывать Сергею каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вне треугольника ABC построены равнобедренные прямоугольные треугольники AKC, ALB и BMC с прямыми углами K, L и M соответственно.

а) Докажите, что LC — высота треугольника KLM.

б) Найдите площадь треугольника KLM, если $LC = 6$.

17 Найдите, при каких неположительных значениях a функция $f(x) = ax^4 + 4x^3 - 3x^2 - 5$ на отрезке $[-2; 2]$ имеет две точки максимума.

18 Для каждого натурального числа n обозначим через $n!$ произведение первых n натуральных чисел ($1! = 1$).

а) Существует ли такое натуральное число n, что десятичная запись числа $n!$ оканчивается ровно 10 нулями?

б) Существует ли такое натуральное число n, что десятичная запись числа $n!$ оканчивается ровно 17 нулями?

в) Сколько существует натуральных чисел n, меньших 75, для каждого из которых десятичная запись числа $n! \cdot (75 - n)!$ оканчивается ровно 17 нулями?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 19

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите корень уравнения $(2x-11)^2=(2x-1)^2$.

Ответ:____________________.

2 В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 22 из США, 16 из Мексики, остальные из Канады. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Канады.

Ответ:____________________.

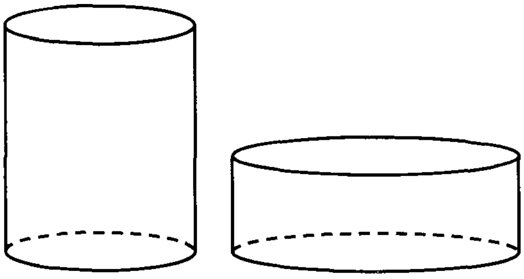
3 Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 15 и 17.

Ответ:____________________.

4 Найдите значение выражения $\dfrac{8^{2,8}\cdot 16^{2,4}}{32^{3,2}}$.

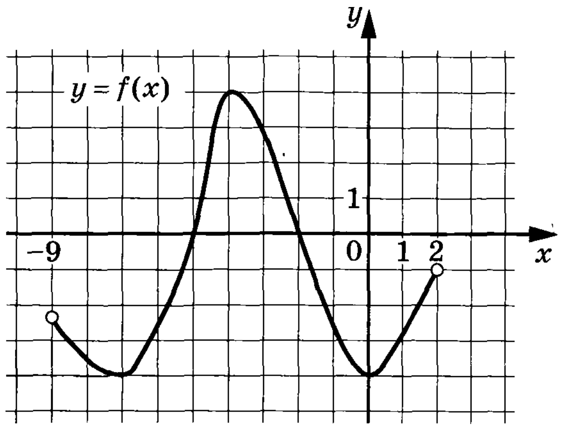
Ответ:____________________.

5 Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 5. У второго цилиндра высота в 2,5 раза меньше, а радиус основания в 3 раза больше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.



Ответ:____________________.

6 На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-9; 2)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.



Ответ:____________________.

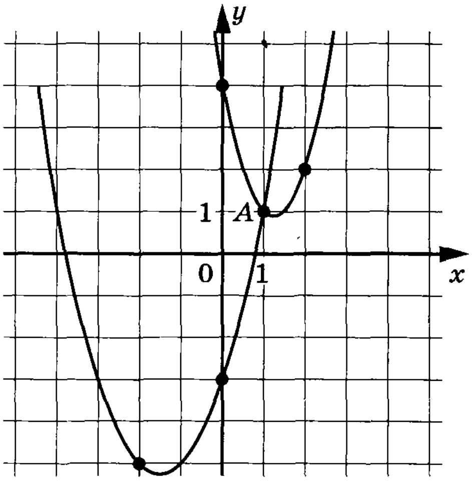
7 Водолазный колокол, содержащий $\nu=5$ моль воздуха объёмом $V_1=26$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2 (в л). Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле $A=\alpha\nu T\log_2\frac{V_1}{V_2}$, где $\alpha=8{,}5\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T=300$ К — температура воздуха. Найдите, какой объём V_2 будет занимать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 25 500 Дж. Ответ дайте в литрах.

Ответ:____________________.

8 Смешали 2 кг воды с 3 кг 32-процентного раствора и некоторым количеством 42-процентного раствора одного и того же вещества. Сколько килограммов 42-процентного раствора использовали, если в результате получили 32-процентный раствор вещества?

Ответ:____________________.

9 На рисунке изображены графики функций $f(x)=2x^2-5x+4$ и $g(x)=ax^2+bx+c$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



Ответ:____________________.

10 За круглый стол на 11 стульев в случайном порядке рассаживаются 9 мальчиков и 2 девочки. Найдите вероятность того, что между двумя девочками будет сидеть один мальчик.

Ответ:____________________.

11 Найдите наименьшее значение функции $y = x\sqrt{x} - 6x + 11$ на отрезке $[0; 30]$.

Ответ:____________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\cos 3x \sin 3x = \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(12x + \frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$.

13 В правильной восьмиугольной призме $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ сторона основания AB равна $3\sqrt{2}$, а боковое ребро AA_1 равно 6. На ребре CC_1 отмечена точка M так, что $CM : MC_1 = 1 : 2$. Плоскость α параллельна прямой H_1E_1 и проходит через точки M и A.

а) Докажите, что сечение призмы $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ плоскостью α — равнобедренная трапеция.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка F_1, а основанием — сечение призмы $ABCDEFGHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$ плоскостью α.

14 Решите неравенство $9 \cdot 2^{\log_3(5-x)} + 2^{1+\log_3 x} - 2^{\log_3\left(5x-x^2\right)} \le 18$.

15 Цена ценной бумаги на конец года вычисляется по формуле $S = 1{,}1S_0 + 2000$, где S_0 — цена этой ценной бумаги на начало года в рублях. Максим может приобрести ценную бумагу, а может положить деньги на банковский счёт, на котором сумма увеличивается за год на 12 %. В начале любого года Максим может продать бумагу и положить все вырученные деньги на банковский счёт, а также снять деньги с банковского счёта и купить ценную бумагу. В начале 2021 года у Максима было 80 тыс. рублей, которые он может положить на банковский счёт или может приобрести на них ценную бумагу. Какая наибольшая сумма может быть у Максима через четыре года? Ответ дайте в рублях.

16 Отрезок, соединяющий середины M и N оснований соответственно BC и AD трапеции $ABCD$, разбивает её на две трапеции, в каждую из которых можно вписать окружность.

а) Докажите, что трапеция $ABCD$ равнобедренная.

б) Известно, что радиус этих окружностей равен 4, а меньшее основание BC исходной трапеции равно 14. Найдите радиус окружности, касающейся боковой стороны AB, основания AN трапеции $ABMN$ и вписанной в неё окружности.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_7\left(36 - y^2\right) = \log_7\left(36 - a^2x^2\right), \\ x^2 + y^2 = 2x + 6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

18 Для набора 30 различных натуральных чисел выполнено, что сумма любых трёх чисел из этого набора меньше суммы любых четырёх чисел из этого набора.

а) Может ли одним из этих чисел быть число 999?

б) Может ли одним из этих чисел быть число 66?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел этого набора?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 20

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

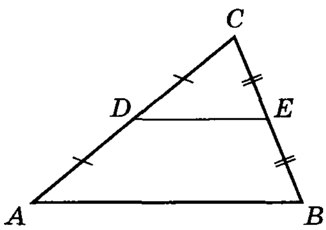
1 Найдите корень уравнения $(x-11)^4=(x+3)^4$.

Ответ:__________________.

2 В соревнованиях по толканию ядра участвуют спортсмены из четырёх стран: 5 из Японии, 4 из Кореи, 9 из Китая и 7 из Индии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсмен, выступающий первым, окажется из Индии.

Ответ:__________________.

3 В треугольнике ABC средняя линия DE параллельна стороне AB. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь трапеции $ABED$ равна 48.

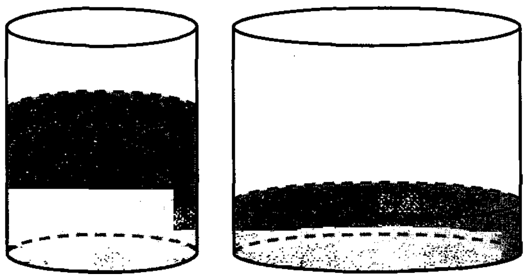


Ответ:__________________.

4 Найдите значение выражения $\dfrac{(\sqrt{20}+\sqrt{12})^2}{4+\sqrt{15}}$.

Ответ:__________________.

5 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 25 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 2,5 раза больше диаметра первого? Ответ дайте в сантиметрах.



Ответ:__________________.

6 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{2}t^3-2t^2+6t+25$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента начала движения. Найдите её скорость (в метрах в секунду) в момент времени $t=4$.

Ответ:___________________.

7 Водолазный колокол, содержащий $\nu=2$ моль воздуха при давлении $p_1=2{,}4$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления p_2 в атмосферах. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле $A=\alpha\nu T\log_2\frac{p_2}{p_1}$, где $\alpha=13{,}5\,\frac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$ — постоянная, $T=300$ К — температура воздуха. Найдите, какое давление p_2 будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 16 200 Дж. Ответ дайте в атмосферах.

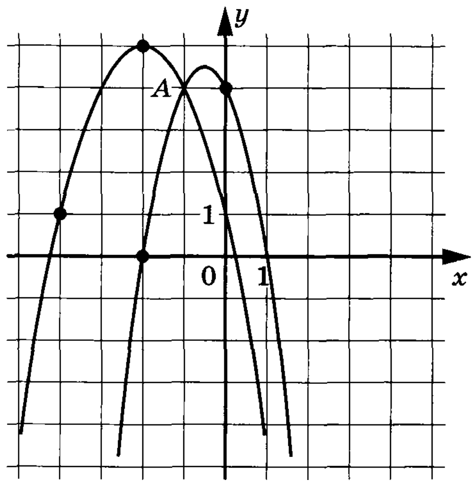
Ответ:___________________.

8 Первая труба заполняет резервуар объёмом 440 литров на 4 минуты медленнее, чем вторая труба заполняет резервуар объёмом 396 литров. Первая труба пропускает на 2 литра воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба?

Ответ:___________________.

9 На рисунке изображены графики функций $f(x)=-2x^2-2x+4$ и $g(x)=ax^2+bx+c$, которые пересекаются в точках $A(-1;\,4)$ и $B(x_0;\,y_0)$. Найдите x_0.

Ответ:___________________.



10 За круглый стол на 6 стульев в случайном порядке рассаживаются 4 мальчика и 2 девочки. Найдите вероятность того, что обе девочки **не будут** сидеть рядом.

Ответ:___________________.

11 Найдите точку минимума функции $y=(x+8)^2\cdot e^{-x-3}$.

Ответ:____________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\cos 2x \sin 2x \sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{4}\cos\left(8x-\frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{8\pi}{3};\frac{10\pi}{3}\right]$.

13 Радиус основания конуса равен 12, а высота конуса равна 5.

а) Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса и взаимно перпендикулярные образующие.
б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания конуса.

14 Решите неравенство $30\cdot 3^{\log_2(7-x)}+3^{1+\log_2 x}-3^{\log_2\left(7x-x^2\right)}\geq 90$.

15 Бригаду из 30 рабочих нужно распределить по двум объектам. Если на первом объекте работает p человек, то каждый из них получает в сутки $200p$ рублей. Если на втором объекте работает p человек, то каждый из них получает в сутки $(50p+300)$ рублей. Как нужно распределить рабочих по объектам, чтобы их суммарная суточная зарплата оказалась наименьшей? Сколько рублей в этом случае придётся заплатить за сутки всем рабочим?

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C во внешнюю сторону построены равнобедренные прямоугольные треугольники AKC, ALB и BMC с прямыми углами K, L и M соответственно.

а) Докажите, что LC — высота треугольника KLM.
б) Найдите площадь треугольника KLM, если $LC=10$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_{11}\left(a-y^2\right)=\log_{11}\left(a-x^2\right), \\ x^2+y^2=2x+6y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

18 Для набора 40 различных натуральных чисел выполнено, что сумма любых двух чисел из этого набора меньше суммы любых четырёх чисел из этого набора.

а) Может ли одним из этих чисел быть число 777?
б) Может ли одним из этих чисел быть число 33?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма чисел этого набора?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 21

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

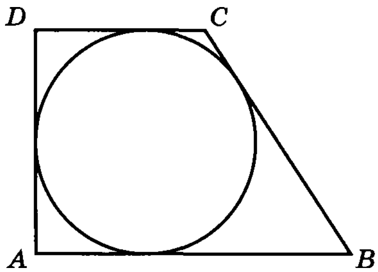
1 Найдите корень уравнения $0{,}5^{4-5x}=64$.

Ответ:___________________.

2 Фабрика выпускает сумки. В среднем 2 сумки из 120 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов. Результат округлите до сотых.

Ответ:___________________.

3 Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 100, её большая боковая сторона равна 37. Найдите радиус окружности.

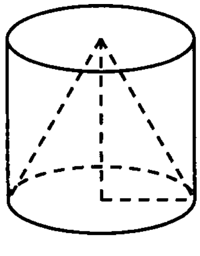


Ответ:___________________.

4 Найдите значение выражения $(\sqrt{3}-\sqrt{13})(\sqrt{3}+\sqrt{13})$.

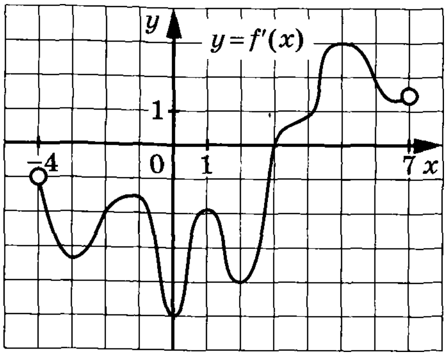
Ответ:___________________.

5 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём цилиндра равен 162. Найдите объём конуса.



Ответ:___________________.

6 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 7)$. В какой точке отрезка $[-2; 2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ:__________________.

7 Для сматывания кабеля на заводе используют лебёдку, которая равноускоренно наматывает кабель на катушку. Угол, на который поворачивается катушка, изменяется со временем по закону $\varphi = \omega t + \frac{\beta t^2}{2}$, где t — время в минутах, $\omega = 60°/\text{мин}$ — начальная угловая скорость вращения катушки, а $\beta = 6°/\text{мин}^2$ — угловое ускорение, с которым наматывается кабель. Рабочий должен проверить ход его намотки не позже того момента, когда угол намотки φ достигнет $3375°$. Определите время после начала работы лебёдки, не позже которого рабочий должен проверить её работу. Ответ выразите в минутах.

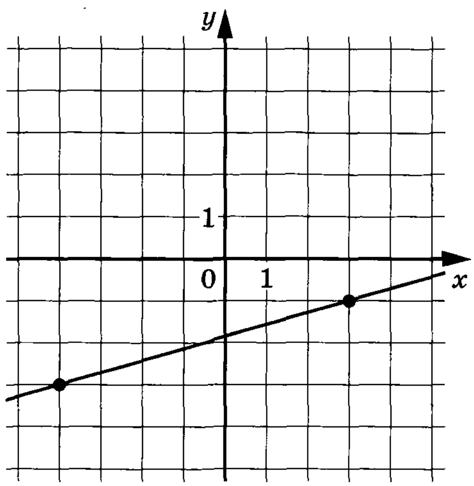
Ответ:__________________.

8 Первая труба наполняет резервуар на 54 минуты дольше, чем вторая. Обе трубы наполняют этот же резервуар за 36 минут. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

Ответ:__________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите $f(-18)$.

Ответ:__________________.



10 В ящике четыре красных и два синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер достанут третьим по счёту?

Ответ:____________________.

11 Найдите точку минимума функции $y = x^2 - 28x + 96\ln x - 5$.

Ответ:____________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

13 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 5$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

14 Решите неравенство $\log_{0,5}(12 - 6x) \geq \log_{0,5}\left(x^2 - 6x + 8\right) + \log_{0,5}(x + 3)$.

15 15 января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20 % больше суммы, взятой в кредит? (Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

16 Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $\angle POA = \angle PAO$.

б) Найдите площадь треугольника APO, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 6, $\angle BAC = 75°$, $\angle ABC = 60°$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно два различных корня.

18 В ящике лежит 76 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 85 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 124 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?

б) Могло ли в ящике оказаться меньше 8 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?

в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 22

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

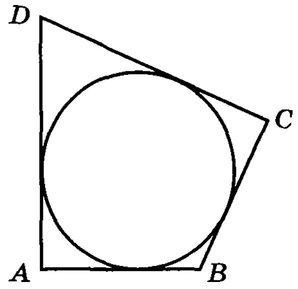
1 Найдите корень уравнения $0{,}2^{5+4x} = 125$.

Ответ:__________________.

2 При производстве в среднем на каждые 1500 насосов приходится 36 неисправных. Найдите вероятность того, что случайно выбранный насос окажется неисправным.

Ответ:__________________.

3 В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 8$, $BC = 5$ и $CD = 27$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

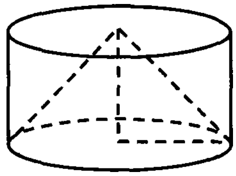


Ответ:__________________.

4 Найдите значение выражения $\left(3\frac{1}{8} - 1{,}5\right) : \frac{1}{56}$.

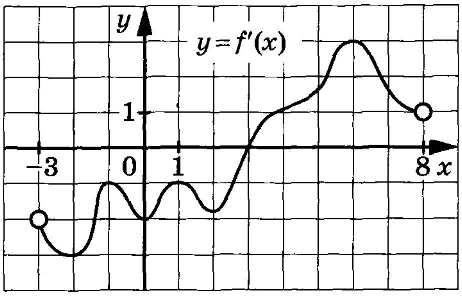
Ответ:__________________.

5 Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $27\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.



Ответ:__________________.

6 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



Ответ: ________________.

7 В телевизоре ёмкость высоковольтного конденсатора $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 6 \cdot 10^{6}$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 34$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1{,}7$ — постоянная. Определите напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошла 51 с. Ответ дайте в киловольтах.

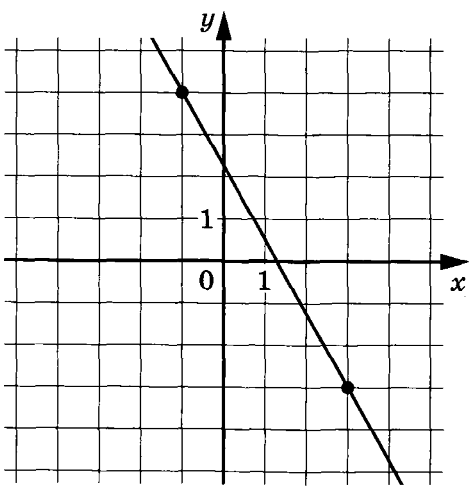
Ответ: ________________.

8 Плиточник должен уложить 120 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 8 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 4 дня раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

Ответ: ________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x, при котором $f(x) = -20{,}5$.

Ответ: ________________.



10 В ящике три красных и три синих фломастера. Фломастеры вытаскивают по очереди в случайном порядке. Какова вероятность того, что первый раз синий фломастер достанут третьим по счёту?

Ответ:____________________.

11 Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 18x^2 + 81x + 23$.

Ответ:____________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $2\sin^2 x - 3\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 5 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AB равна 4, а боковое ребро SA равно 5. На ребре SC отмечена точка K, причём $SK : KC = 1 : 3$. Плоскость α содержит точку K и параллельна плоскости SAD.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α — трапеция.

б) Найдите объём пирамиды, вершиной которой является точка S, а основанием — сечение пирамиды $SABCD$ плоскостью α.

14 Решите неравенство $\log_2(18-9x) - \log_2(x+2) > \log_2\left(x^2-6x+8\right)$.

15 15 января планируется взять кредит в банке на 49 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 2 млн рублей?

(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

16 Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке E.

а) Докажите, что $\angle EOC = \angle ECO$.

б) Найдите площадь треугольника ACE, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $6\sqrt{3}$, $\angle ABC = 60°$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|x-6|+a-6}{x^2-10x+a^2}=0$$

имеет ровно два различных корня.

18 В ящике лежит 58 овощей, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два овоща различной массы, а средняя масса всех овощей равна 1000 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых меньше 1000 г, равна 976 г. Средняя масса овощей, масса каждого из которых больше 1000 г, равна 1036 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну овощей массой меньше 1000 г и овощей массой больше 1000 г?

б) Могло ли в ящике оказаться ровно 12 овощей, масса каждого из которых равна 1000 г?

в) Какую наименьшую массу может иметь овощ в этом ящике?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 23

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите корень уравнения $\sqrt{11-5x}=1-x$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите наибольший из корней.

Ответ:__________________.

2 Научная конференция проводится в 3 дня. Всего запланировано 50 докладов: в первый день 22 доклада, остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Ответ:__________________.

3 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 145. Найдите площадь параллелограмма $A'B'C'D'$, вершинами которого являются середины сторон данного параллелограмма.

Ответ:__________________.

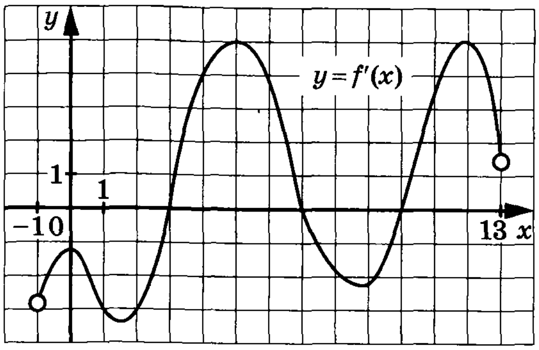
4 Найдите $\log_a\left(ab^8\right)$, если $\log_a b=8$.

Ответ:__________________.

5 Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём шара равен 188. Найдите объём конуса.

Ответ:__________________.

6 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-1; 13)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = x + 18$ или совпадает с ней.



Ответ:____________________.

7 Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 292$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \dfrac{f_0}{1 - \dfrac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 8 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 300$ м/с. Ответ выразите в м/с.

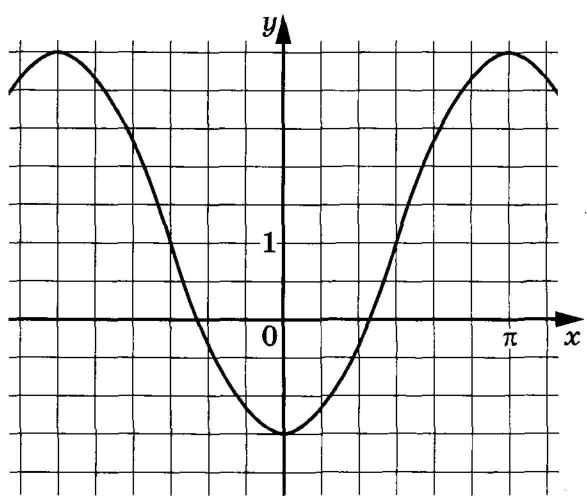
Ответ:____________________.

8 Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 16 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 10 км/ч больше скорости другого?

Ответ:____________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = a\cos x + b$. Найдите a.

Ответ:____________________.



10 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,05. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,99. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,05. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ:____________________.

11 Найдите наибольшее значение функции $y=\left(x^2+22x-22\right)e^{2-x}$ на отрезке [0; 5].

Ответ:____________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\log_{\frac{1}{2}}\left(3\cos 2x-2\cos^2 x+5\right)=-2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi;\ \frac{13\pi}{2}\right]$.

13 В правильной треугольной усечённой пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ площадь нижнего основания ABC в четыре раза больше площади меньшего основания $A_1B_1C_1$. Через ребро AC проведена плоскость α, которая пересекает ребро BB_1 в точке K и делит пирамиду на два многогранника равного объёма.

а) Докажите, что точка K делит ребро BB_1 в отношении $7:1$, считая от точки B.

б) Найдите площадь сечения усечённой пирамиды плоскостью α, если высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$, а ребро меньшего основания равно $2\sqrt{6}$.

14 Решите неравенство $25^{2x^2-0,5}-0,6\cdot 4^{2x^2+0,5}\le 10^{2x^2}$.

15 В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 15 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 1,587 млн рублей.

Сколько миллионов рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

16 Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и M, а также пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N.

а) Докажите, что $AM = AN$.

б) Найдите отношение $CD : DN$, если $AB : BC = 1 : 3$, а $\cos\angle BAD = 0{,}4$.

17 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\left(\sqrt{12-x^2}-y\right)\left((x+4)^2+(y+4)^2-8(x+4)+x^2-y^2-24\right)}{2-x^2}=0, \\ y=1-2a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

18 В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писал 51 учащийся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 вырасти в 2 раза?

б) Средний балл в школе № 1 вырос на 10 %, средний балл в школе № 2 также вырос на 10 %. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 1?

в) Средний балл в школе № 1 вырос на 10 %, средний балл в школе № 2 также вырос на 10 %. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 24

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите корень уравнения $\sqrt{2x-3}=x-3$.

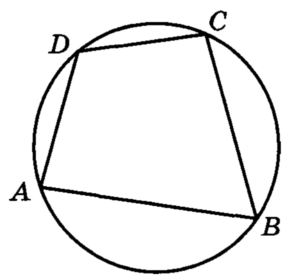
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите наименьший из корней.

Ответ:____________________.

2 Конкурс исполнителей проводится в 4 дня. Всего заявлено 50 выступлений: по одному от каждой страны, участвующей в конкурсе. Исполнитель из России участвует в конкурсе. В первый день запланировано 26 выступлений, остальные распределены поровну между оставшимися днями. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что выступление исполнителя из России состоится в третий день конкурса?

Ответ:____________________.

3 Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 112° и 125°. Найдите больший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



Ответ:____________________.

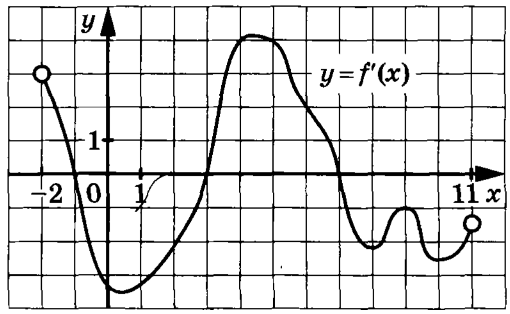
4 Найдите $\log_a\left(a^4b^3\right)$, если $\log_a b=4$.

Ответ:____________________.

5 Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 19. Найдите объём шара.

Ответ:____________________.

6 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 11)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $f(x)$ параллельна прямой $y = -2x - 5$ или совпадает с ней.



Ответ:__________________.

7 При сближении источника и приёмника звуковых сигналов, движущихся в некоторой среде по прямой навстречу друг другу, частота звукового сигнала, регистрируемого приёмником, не совпадает с частотой исходного сигнала $f_0 = 130$ Гц и определяется следующим выражением: $f = f_0 \frac{c+u}{c-v}$ (Гц), где c — скорость распространения сигнала в среде (в м/с), а $u = 15$ м/с и $v = 9$ м/с — скорости приёмника и источника относительно среды соответственно. При какой максимальной скорости c (в м/с) распространения сигнала в среде частота сигнала в приёмнике f будет не менее 135 Гц?

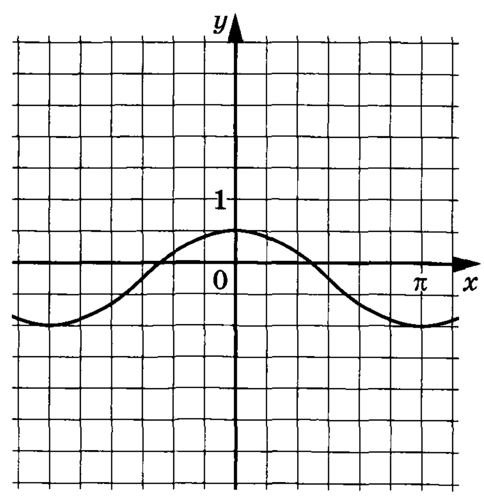
Ответ:__________________.

8 Из одной точки круговой трассы, длина которой равна 25 км, одновременно в одном направлении стартовали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 114 км/ч, и через 30 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:__________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = a\cos x + b$. Найдите b.

Ответ:__________________.



10 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,04. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,98. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,03. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ:__________________.

11 Найдите наименьшее значение функции $y=(1-x)e^{2-x}$ на отрезке [0,5; 5].

Ответ:__________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\log_{\frac{1}{3}}\left(2\sin^2 x-3\cos 2x+6\right)=-2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\ -2\pi\right]$.

13 В правильной треугольной усечённой пирамиде $ABCA_1B_1C_1$ площадь нижнего основания ABC в девять раз больше площади меньшего основания $A_1B_1C_1$. Через ребро AB проведена плоскость α, которая пересекает ребро CC_1 в точке N и делит пирамиду на два многогранника равного объёма.

а) Докажите, что точка N делит ребро CC_1 в отношении $5:13$, считая от точки C_1.

б) Найдите площадь сечения усечённой пирамиды плоскостью α, если высота пирамиды равна 13, а ребро меньшего основания равно 3.

14 Решите неравенство $3\cdot 25^{x+0,5}+4^{2x+1,5}\le 22\cdot 20^{x}$.

15 В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 16 % по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,523 млн рублей.

Сколько миллионов рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

16 Окружность проходит через вершины A, B и D параллелограмма $ABCD$, пересекает сторону BC в точках B и M, а также пересекает продолжение стороны CD за точку D в точке N.

а) Докажите, что $AM = AN$.

б) Найдите отношение $CD : DN$, если $AB : BC = 2 : 3$, а $\cos\angle BAD = 0{,}7$.

17 Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\left(y-\sqrt{10-x^2}\right)\left((x+5)^2+(y+5)^2-10(x+7{,}5)+x^2-y^2+5\right)}{\sqrt{x^2-1}}=0, \\ y=ax+a-1 \end{cases}$$

имеет одно решение.

18 В школах № 1 и № 2 учащиеся писали тест. Из каждой школы тест писали по крайней мере 2 учащихся, а суммарно тест писали 9 учащихся. Каждый учащийся, писавший тест, набрал натуральное количество баллов. Оказалось, что в каждой школе средний балл за тест был целым числом. После этого один из учащихся, писавших тест, перешёл из школы № 1 в школу № 2, а средние баллы за тест были пересчитаны в обеих школах.

а) Мог ли средний балл в школе № 1 уменьшиться в 10 раз?

б) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10 %. Мог ли первоначальный средний балл в школе № 2 равняться 7?

в) Средний балл в школе № 1 уменьшился на 10 %, средний балл в школе № 2 также уменьшился на 10 %. Найдите наименьшее значение первоначального среднего балла в школе № 2.

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 25

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

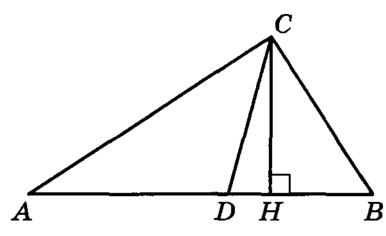
1 Найдите корень уравнения $\log_3(x+6)=\log_3(10-x)-1$.

Ответ:__________________.

2 В сборнике билетов по физике всего 25 билетов, в 11 из них встречается вопрос по теме «Конденсаторы». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос по теме «Конденсаторы».

Ответ:__________________.

3 Один из углов прямоугольного треугольника равен 66°. Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

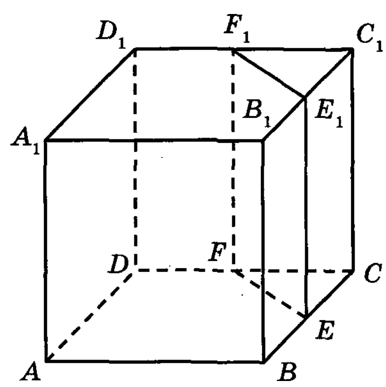


Ответ:__________________.

4 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(5\sqrt{3}\right)^2}{10}$.

Ответ:__________________.

5 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 25. Найдите объём куба.



Ответ:__________________.

6 Прямая $y = 8x + 11$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:____________________.

7 Рейтинг R интернет-магазина вычисляется по формуле $R = r_{\text{пок}} - \dfrac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K+1)^m}$, где $m = \dfrac{0{,}02K}{r_{\text{пок}} + 0{,}1}$, $r_{\text{пок}}$ — средняя оценка магазина покупателями, $r_{\text{экс}}$ — оценка магазина, данная экспертами, K — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 15, их средняя оценка равна 0,3, а оценка экспертов равна 0,38.

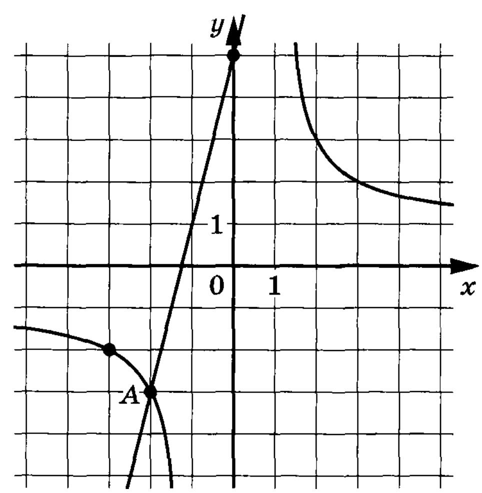
Ответ:____________________.

8 Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 30 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что в час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 1 час позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:____________________.

9 На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках $A(-2; 3)$ и $B(x_0; y_0)$. Найдите x_0.

Ответ:____________________.



10 Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов. Известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,5. Найдите отношение вероятностей событий «стрелок поразит ровно пять мишеней» и «стрелок поразит ровно три мишени».

Ответ:____________________.

11 Найдите точку минимума функции $y=\frac{162}{x}+2x+7$.

Ответ:____________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $2\cos^4 x+3\sin^2 x-2=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$.

13 Основанием пирамиды $FABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 36. Все боковые рёбра пирамиды равны 30. На рёбрах FB и FC отмечены соответственно точки K и N так, что $BK=CN=20$. Через точки K и N проведена плоскость α, перпендикулярная плоскости ABC.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану AM в отношении $2:7$.
б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α.

14 Решите неравенство $\log^2_{0,2}(x-3)^8+8\log_5(x-3)^4\le 32$.

15 15 декабря планируется взять кредит в банке на сумму 600 тысяч рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
- к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите n, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 852 тысячи рублей.

16 В треугольнике ABC известно, что $AC = 10$ и $AB = BC = 14$.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная стороне AC, пересекает окружность, вписанную в треугольник ABC.

б) Найдите отношение длин отрезков, на которые окружность делит среднюю линию, параллельную стороне AC.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$(4|x| - a - 3)\left(x^2 - 2x - 2 - a\right) \leq 0$$

имеет хотя бы одно решение из промежутка $[-4;\ 4]$.

18 Группу детей можно перевезти автобусами модели А или автобусами модели Б. Известно, что в автобусе модели А количество мест больше 30, но меньше 40, а в автобусах модели Б — больше 40, но меньше 50. Если всех детей рассадить в автобусы модели А, то все места будут заняты. Если всех детей рассадить в автобусы модели Б, то все места также будут заняты, но потребуется на один автобус меньше.

а) Может ли потребоваться 5 автобусов модели А?

б) Найдите наименьшее возможное количество детей в группе, если известно, что их больше 150.

в) Найдите наибольшее возможное количество детей в группе.

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 26

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

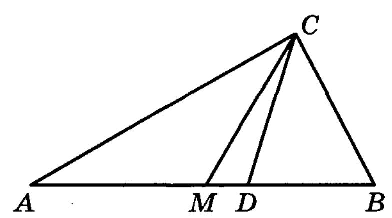
1 Найдите корень уравнения $\log_5(x+7)=\log_5(5-x)-1$.

Ответ:____________________.

2 В сборнике билетов по философии всего 50 билетов, в 6 из них встречается вопрос по теме «Кант». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Кант».

Ответ:____________________.

3 Острые углы прямоугольного треугольника равны 80° и 10°. Найдите угол между биссектрисой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

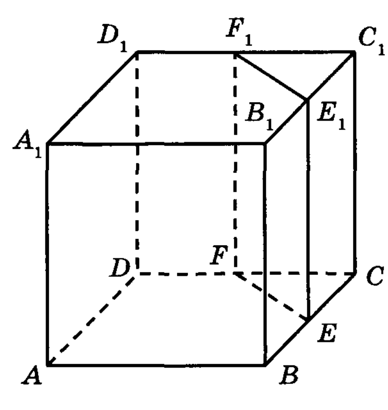


Ответ:____________________.

4 Найдите значение выражения $\dfrac{20}{(2\sqrt{2})^2}$.

Ответ:____________________.

5 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 11. Найдите объём куба.



Ответ:____________________.

6 Прямая $y = 6x + 7$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 - 5x + 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ:____________________.

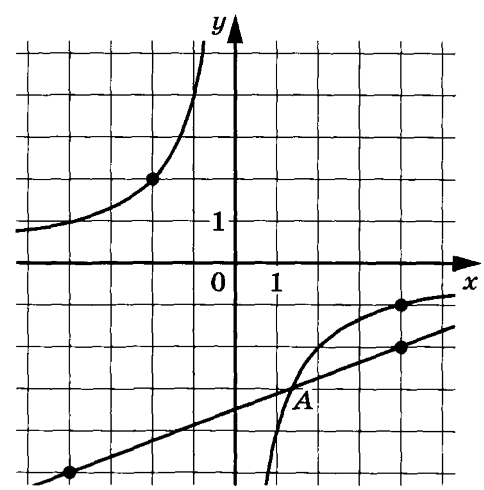
7 При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 7{,}776 \cdot 10^6$ Па $\cdot$ м^4, где p — давление в газе в паскалях, V — объём газа в кубических метрах, $k = \frac{4}{3}$. Найдите, какой объём V (в куб. м) будет занимать газ при давлении p, равном $3{,}75 \cdot 10^6$ Па.

Ответ:____________________.

8 Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 16 км/ч, проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 2 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 53 часа после отплытия из него. Сколько километров прошёл теплоход за весь рейс?

Ответ:____________________.

9 На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B. Найдите ординату точки B.



Ответ:____________________.

10 Стрелок стреляет по пяти одинаковым мишеням. На каждую мишень даётся не более двух выстрелов. Известно, что вероятность поразить мишень каждым отдельным выстрелом равна 0,8. Во сколько раз вероятность события «стрелок поразит ровно четыре мишени» больше вероятности события «стрелок поразит ровно три мишени»?

Ответ:____________________.

11 Найдите точку минимума функции $y=-\frac{x}{x^2+900}$.

Ответ:__________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $4\sin^4 x+7\cos^2 x-4=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi; -4\pi]$.

13 Основанием пирамиды $FABC$ является правильный треугольник ABC со стороной 48. Все боковые рёбра пирамиды равны 40. На рёбрах FB и FC отмечены соответственно точки K и N так, что $FK=FN=10$. Через точки K и N проведена плоскость α, перпендикулярная плоскости ABC.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану AM в отношении $1:3$.
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α.

14 Решите неравенство $3\log_4^2(4-x)^8+4\log_{0,5}(4-x)^6\geq 72$.

15 15 декабря планируется взять кредит в банке на сумму 1 000 000 рублей на $(n+1)$ месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
- к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

16 В треугольнике ABC известно, что $AC = 26$ и $AB = BC = 38$.

а) Докажите, что средняя линия треугольника, параллельная стороне AC, пересекает окружность, вписанную в треугольник ABC.

б) Найдите отношение длин отрезков, на которые окружность делит среднюю линию, параллельную стороне AC.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых любое значение из промежутка $[-1,5;\ -0,5]$ является решением неравенства

$$(4|x|-a-3)\left(x^2-2x-2-a\right)\geq 0.$$

18 Группу детей можно перевезти автобусами модели А или автобусами модели Б. Известно, что в автобусе модели А количество мест больше 40, но меньше 50, а в автобусах модели Б — больше 50, но меньше 60. Если всех детей рассадить в автобусы модели А, то все места будут заняты. Если всех детей рассадить в автобусы модели Б, то все места также будут заняты, но потребуется на один автобус меньше.

а) Может ли потребоваться 4 автобуса модели Б?

б) Найдите наибольшее возможное количество детей в группе, если известно, что их меньше 300.

в) Найдите наибольшее возможное количество автобусов модели А.

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 27

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

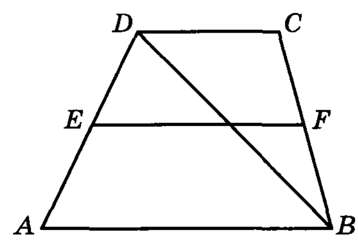
1 Найдите корень уравнения $3\frac{5}{9}x = 5\frac{1}{3}$.

Ответ:__________________.

2 Гена, Юра, Филипп, Вадим и Таня бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должна будет Таня.

Ответ:__________________.

3 Основания трапеции равны 15 и 26. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из её диагоналей.



Ответ:__________________.

4 Найдите значение выражения $\frac{\log_3 4}{\log_3 2} + \log_2 0{,}5$.

Ответ:__________________.

5 От треугольной пирамиды, объём которой равен 42, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию основания. Найдите объём отсечённой треугольной пирамиды.

Ответ:__________________.

6 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 9t - 22$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 3 м/с?

Ответ:__________________.

7 Расстояние от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h км над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле $l=\sqrt{2Rh}$, где $R=6400$ км — радиус Земли. С какой высоты горизонт виден на расстоянии 64 км? Ответ выразите в километрах.

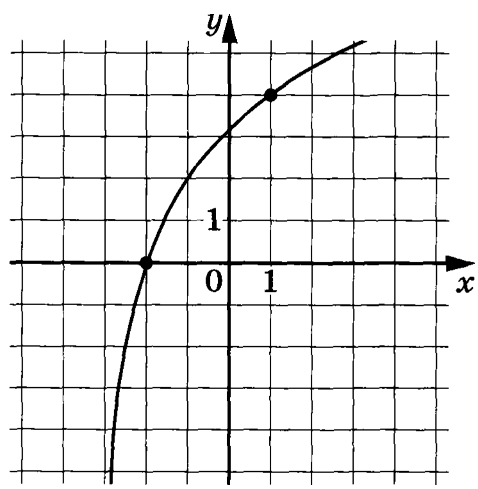
Ответ:__________________.

8 Смешав 31-процентный и 57-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 22-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 47-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 31-процентного раствора использовали для получения смеси?

Ответ:__________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x)=\log_a(x+b)$. Найдите $f(13)$.

Ответ:__________________.



10 В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,7 независимо от других продавцов. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно.

Ответ:__________________.

11 Найдите наименьшее значение функции $y=-9-8\sqrt{3}\pi+24\sqrt{3}x-48\sqrt{3}\sin x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ:__________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $24\cdot 4^{x-0,5}-11\cdot 2^{x+1}+6=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-1;\ 1]$.

13 Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=15$ и $BC=25$. Все боковые рёбра пирамиды равны $5\sqrt{17}$. На рёбрах AD и BC отмечены соответственно точки K и N так, что $AK=CN=8$. Через точки K и N проведена плоскость α, перпендикулярная ребру SB.

а) Докажите, что плоскость α проходит через точку M — середину ребра SB.
б) Найдите расстояние между прямыми DS и KM.

14 Решите неравенство $\sqrt{x+\frac{1}{2}}\cdot\log_{\frac{1}{2}}(\log_2|1-x|)\ge 0$.

15 По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение 25 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 20 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: **целое** число n млн рублей и в первый, и во второй годы, а также **целое** число m млн рублей и в третий, и в четвёртый годы. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, и наименьшее значение m, такое, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года вырастут как минимум в четыре раза.

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиусом $R=27$. Известно, что $AB=BC=CD=36$.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.
б) Найдите AD.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых линии $y=a|x-2|+|a|-2$ и $y=\frac{a}{2}$ ограничивают многоугольник, площадь которого не более 0,5.

18 Издательство на выставку привезло несколько книг для продажи (каждую книгу привезли в единственном экземпляре). Цена каждой книги — натуральное число рублей. Если цена книги меньше 100 рублей, на неё приклеивают бирку «выгодно». Однако до открытия выставки цену каждой книги увеличили на 10 рублей, из-за чего количество книг с бирками «выгодно» уменьшилось.

а) Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой «выгодно» до открытия выставки?

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки «выгодно» до открытия выставки?

в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 110 рублей, средняя цена книг с биркой «выгодно» составляла 81 рубль, а средняя цена книг без бирки — 226 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 90 рублей, а средняя цена книг без бирки — 210 рублей. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 28

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

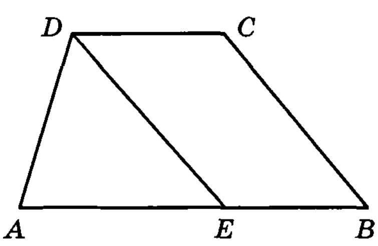
1 Найдите корень уравнения $7\frac{7}{9}x=5\frac{5}{6}$.

Ответ:___________________.

2 Настя, Паша, Петя, Оксана, Вася, Рома, Наташа и Дима бросили жребий — кому начинать игру. Найдите вероятность того, что начинать игру должна будет девочка.

Ответ:___________________.

3 Прямая, проведённая параллельно боковой стороне трапеции через конец меньшего основания, равного 41, отсекает треугольник, периметр которого равен 83. Найдите периметр трапеции.



Ответ:___________________.

4 Найдите значение выражения $\frac{\log_7 2}{\log_7 5}-\log_5 10$.

Ответ:___________________.

5 Найдите объём правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 12, а высота равна $6\sqrt{3}$.

Ответ:___________________.

6 Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=\frac{1}{3}t^3-6t+20$, где x — расстояние от точки отсчёта в метрах, t — время в секундах, прошедшее с начала движения. В какой момент времени (в секундах) её скорость была равна 3 м/с?

Ответ:___________________.

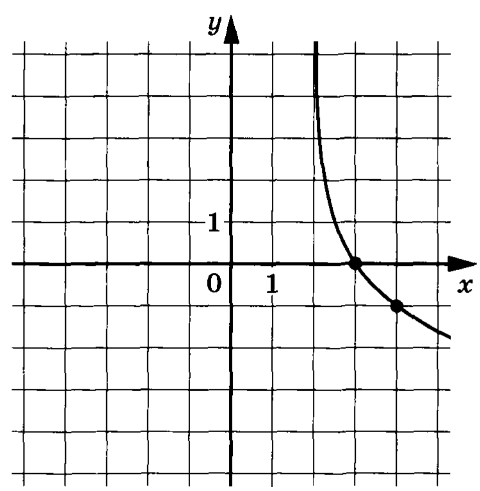
7 Двигаясь со скоростью $v=5$ м/с, трактор тащит сани с силой $F=100$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность, развиваемая трактором, вычисляется по формуле $N=Fv\cos\alpha$. Найдите, при каком угле α (в градусах) эта мощность будет равна 250 кВт (кВт — это $\frac{\text{кН}\cdot\text{м}}{\text{с}}$).

Ответ:___________________.

8 Два человека отправляются из одного дома на прогулку до опушки леса, находящейся в 3,5 км от дома. Один идёт со скоростью 3,6 км/ч, а другой — со скоростью 4,8 км/ч. Дойдя до опушки, второй с той же скоростью возвращается обратно. На каком расстоянии от дома произойдёт их встреча? Ответ дайте в километрах.

Ответ:___________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x)=\log_a(x+b)$. Найдите значение x, при котором $f(x)=-5$.



Ответ:___________________.

10 В магазине три продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,4 независимо от других продавцов. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все три продавца заняты одновременно.

Ответ:___________________.

11 Найдите точку минимума функции $y=(3-2x)\cos x+2\sin x+4$, принадлежащую промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ответ:____________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $4\cdot 25^{x+0,5}-60\cdot 5^{x-1}+1=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3; -1]$.

13 Основанием пирамиды $TABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=26$ и $BC=18$. Все боковые рёбра пирамиды равны $10\sqrt{5}$. На рёбрах AB и CD отмечены соответственно точки N и M так, что $BN=DM=12$. Через точки N и M проведена плоскость α, перпендикулярная ребру TA.

а) Докажите, что плоскость α проходит через точку K — середину ребра TA.

б) Найдите расстояние между прямыми TC и KN.

14 Решите неравенство $\sqrt{x+3}\cdot\log_{\frac{1}{3}}(\log_3|1+x|)\le 0$.

15 По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение 20 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: **целое** число n млн рублей и в первый, и во второй годы, а также **целое** число m млн рублей и в третий, и в четвёртый годы. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, и наименьшее значение m, такое, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся.

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиусом $R=12$. Известно, что $AB=BC=CD=18$.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите AD.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых линии $y=a|3-x|+|a|-3$ и $y=\frac{a}{3}$ ограничивают многоугольник, площадь которого не менее $\frac{1}{3}$.

18 Издательство на выставку привезло несколько книг для продажи (каждую книгу привезли в единственном экземпляре). Цена каждой книги — натуральное число рублей. Если цена книги меньше 80 рублей, на неё приклеивают бирку «выгодно». Однако до открытия выставки цену каждой книги увеличили на 5 рублей, из-за чего количество книг с бирками «выгодно» уменьшилось.

а) Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой «выгодно» до открытия выставки?

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки «выгодно» до открытия выставки?

в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 103 рубля, средняя цена книг с биркой «выгодно» составляла 67 рублей, а средняя цена книг без бирки — 157 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 70 рублей, а средняя цена книг без бирки — 146 рублей. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 29

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите корень уравнения $\log_2(8-x)=2\log_2(4+x)$.

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите наименьший из корней.

Ответ:__________________.

2 В группе туристов 25 человек. Их вертолётом доставляют в труднодоступный район, перевозя по 5 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист З. полетит третьим рейсом вертолёта.

Ответ:__________________.

3 В треугольнике со сторонами 8 и 4 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 1. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

Ответ:__________________.

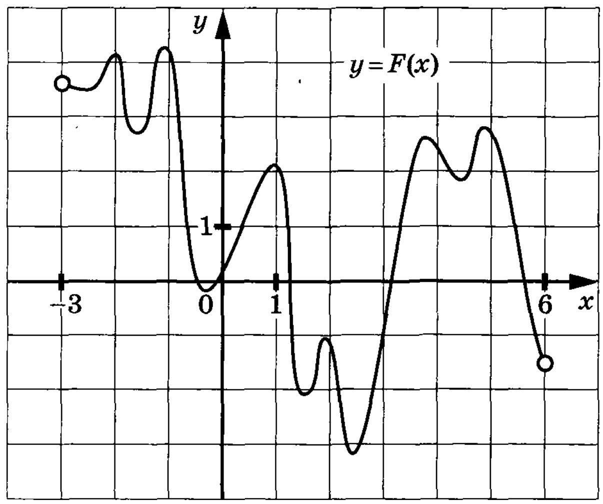
4 Найдите значение выражения $\dfrac{\left(2^{\frac{4}{7}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\right)^{21}}{6^{12}}$.

Ответ:__________________.

5 Шар, объём которого равен 64, вписан в цилиндр. Найдите объём цилиндра.

Ответ:__________________.

6 На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;\ 6)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2;\ 5]$.



Ответ: ____________________.

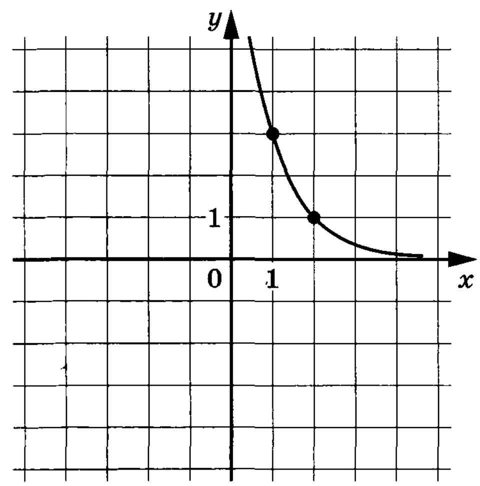
7 Груз массой 0,3 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \cos\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 2$ с — период колебаний, $v_0 = 0{,}2$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 33 с после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ: ____________________.

8 На изготовление 33 деталей первый рабочий тратит на 8 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 77 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 4 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: ____________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x)=a^{x+b}$. Найдите $f(-1)$.



Ответ:____________________.

10 В кафе на одной полке в случайном порядке стоят 50 чайных чашек: 30 зелёных, 10 красных и 10 синих. На другой полке в случайном порядке стоят 50 блюдец: 30 зелёных, 10 красных и 10 синих. Найдите вероятность того, что случайно выбранные чашка и блюдце будут зелёного цвета.

Ответ:____________________.

11 Найдите наименьшее значение функции $y=2x^2-5x+\ln x-5$ на отрезке $\left[\frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right]$.

Ответ:____________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $8^{\cos^2 x}=(\sqrt{2})^{5\sin 2x}\cdot 0{,}5$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

13 Основание пирамиды $SABC$ — равносторонний треугольник ABC. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания, точки M и N — середины рёбер BC и AB соответственно, причём $SN = AM$.

а) Докажите, что угол между прямыми AM и SN равен $60°$.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $BC = 3\sqrt{2}$.

14 Решите неравенство $4^{2x+1,5} - 9^{x+0,5} \geq 2 \cdot 12^x$.

15 В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на 14 % по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 3,249 млн рублей.
Сколько миллионов рублей было взято в банке, если известно, что кредит был полностью погашен двумя равными платежами (то есть за два года)?

16 В треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке F. Отрезок BD — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AD = CF$.

б) Найдите DF, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 12, $\angle BAC = 35°$, $\angle ACB = 65°$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 + x + a}{x^2 - 2x + a^2 + 6a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

18 Сторона квадрата на 3 см длиннее ширины прямоугольника, площади этих фигур равны, а все длины сторон — целые числа.

а) Может ли ширина прямоугольника быть равной 8?

б) Может ли длина прямоугольника быть равной 16?

в) Найдите все возможные варианты таких пар прямоугольников и квадратов. В ответе укажите длины их сторон.

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 30

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

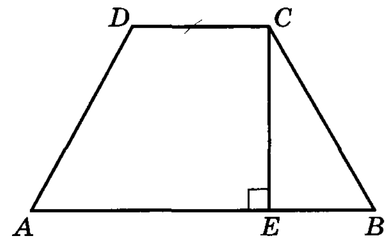
1 Найдите корень уравнения $\log_7(x+18)=2\log_7(2-x)$.
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите наибольший из корней.

Ответ:___________________.

2 В группе туристов 12 человек. С помощью жребия они выбирают трёх человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Ответ:___________________.

3 Перпендикуляр, опущенный из вершины тупого угла на большее основание равнобедренной трапеции, делит его на части, имеющие длины 10 и 9. Найдите среднюю линию этой трапеции.



Ответ:___________________.

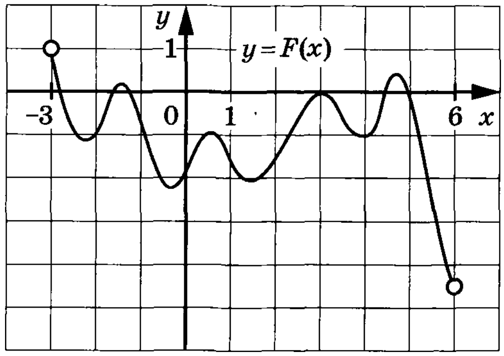
4 Найдите значение выражения $2{,}5^{\frac{1}{7}}\cdot 2^{\frac{2}{7}}\cdot 10^{\frac{6}{7}}$.

Ответ:___________________.

5 Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 74. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

Ответ:___________________.

6 На рисунке изображён график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 6)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 5]$.



Ответ:__________________.

7 Два тела, массой $m = 10$ кг каждое, движутся с одинаковой скоростью $v = 10$ м/с под углом 2α друг к другу. Энергия (в джоулях), выделяющаяся при их абсолютно неупругом соударении, вычисляется по формуле $Q = mv^2\sin^2\alpha$, где m — масса в килограммах, v — скорость в м/с. Найдите, под каким наименьшим углом 2α (в градусах) должны двигаться тела, чтобы в результате соударения выделилось энергии не менее 750 джоулей.

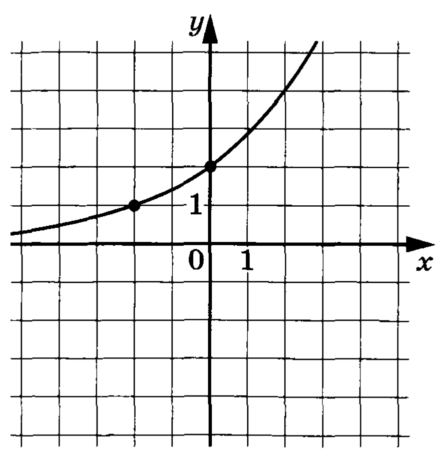
Ответ:__________________.

8 Две бригады, состоящие из рабочих одинаковой квалификации, одновременно начали выполнять два одинаковых заказа. В первой бригаде было 6 рабочих, а во второй — 15 рабочих. Через 5 дней после начала работы в первую бригаду перешли 7 рабочих из второй бригады. В итоге оба заказа были выполнены одновременно. Найдите, сколько дней потребовалось на выполнение заказов.

Ответ:__________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите, при каком значении x значение функции равно 8.

Ответ:__________________.



10 В кафе на одной полке в случайном порядке стоят 50 чайных чашек: 30 зелёных, 10 красных и 10 синих. На другой полке в случайном порядке стоят 50 блюдец: 30 зелёных, 10 красных и 10 синих. Найдите вероятность того, что случайно выбранные чашка и блюдце будут одинакового цвета.

Ответ:____________________.

11 Найдите наименьшее значение функции $y = 4x^2 - 12x + 4\ln x - 10$ на отрезке $\left[\frac{12}{13}; \frac{14}{13}\right]$.

Ответ:____________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $125^{\sin^2 x} = (\sqrt{5})^{5\sin 2x} \cdot 0{,}2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi; -2\pi]$.

13 Основание пирамиды $SABC$ — равносторонний треугольник ABC. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания, точки M и N — середины рёбер BC и AB соответственно, причём $SN = AM$.

а) Докажите, что угол между прямыми AM и SN равен $60°$.

б) Найдите расстояние между этими прямыми, если $BC = 6$.

14 Решите неравенство $\log_{\frac{1}{4}}(5-5x) \le \log_{\frac{1}{4}}\left(x^2-3x+2\right) + \log_4(x+4)$.

15 По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение — 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 12 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: **целое** число n млн рублей и в первый, и во второй годы, а также **целое** число m млн рублей и в третий, и в четвёртый годы. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года вырастут как минимум в полтора раза, и наименьшее значение m, такое, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года как минимум утроятся.

16 В треугольнике ABC все стороны различны. Прямая, содержащая высоту BH треугольника ABC, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке K. Отрезок BN — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что AC и KN параллельны.

б) Найдите расстояние от точки N до прямой AC, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен $6\sqrt{6}$, $\angle BAC = 30°$, $\angle ABC = 105°$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y=(a+2)x^2+2ax+a-2, \\ y^2=x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

18 Сторона квадрата на 2 см длиннее ширины прямоугольника, площади этих фигур равны, а все длины сторон — натуральные числа.

а) Может ли ширина прямоугольника быть равной 6?

б) Может ли длина прямоугольника быть равной 9?

в) Найдите все возможные варианты таких пар прямоугольников и квадратов. В ответе укажите длины их сторон.

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 31

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

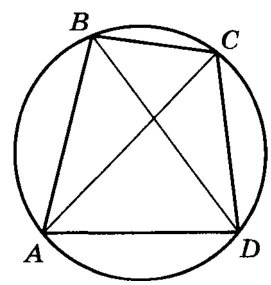
1 Найдите корень уравнения $\frac{4}{7}x = -4\frac{5}{7}$.

Ответ:____________________.

2 На олимпиаде по социологии 400 участников размещают в трёх аудиториях: в первых двух — по 170 человек, а оставшихся — в третьей аудитории. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник попадёт в третью аудиторию.

Ответ:____________________.

3 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен $122°$, угол ABD равен $36°$. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.

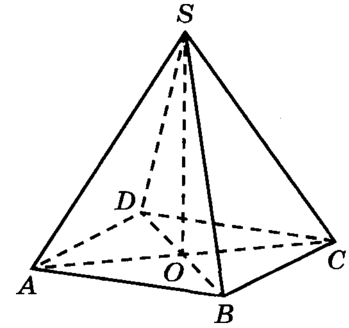


Ответ:____________________.

4 Найдите значение выражения $(27^4)^3 : (9^2)^8$.

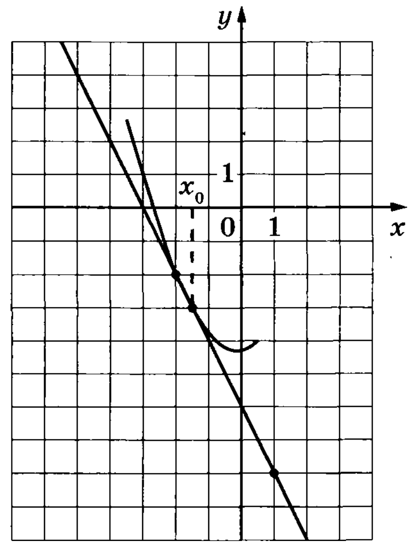
Ответ:____________________.

5 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка O — центр основания, S — вершина, $SO = 9$, $SC = 15$. Найдите длину отрезка BD.



Ответ:____________________.

6 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ:___________________.

7 Велосипедист совершает n оборотов педалей велосипеда, а велосипед при этом проходит путь, который можно найти по формуле

$$S = 2\pi R \frac{a_1}{a_2} n \text{ (м)},$$

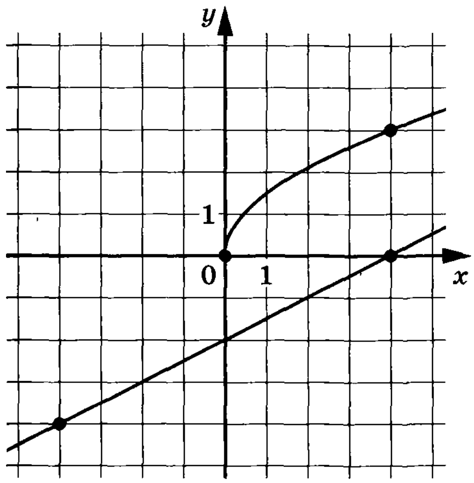
где R — радиус колеса в метрах, a_1 и a_2 — количество зубцов на большой и малой звёздочках велосипеда соответственно. Какой путь пройдёт велосипед при 13 оборотах педалей, если на большой звёздочке 40 зубьев, на малой — 15, а диаметр колеса 57 см? Считайте, что $\pi = 3{,}14$. Результат округлите до целого числа метров.

Ответ:___________________.

8 Имеется два сосуда. Первый содержит 55 кг, а второй — 20 кг растворов кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 68 % кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 75 % кислоты. Сколько процентов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ:___________________.

9 На рисунке изображены графики функций $f(x)=a\sqrt{x}$ и $g(x)=kx+b$, которые пересекаются в точке A. Найдите абсциссу точки A.



Ответ:____________________.

10 За круглый стол на 6 стульев в случайном порядке рассаживаются 3 мальчика и 3 девочки. Найдите вероятность того, что рядом с любым мальчиком будут сидеть две девочки.

Ответ:____________________.

11 Найдите наибольшее значение функции $y=-\frac{4}{3}x\sqrt{x}+6x+13$ на отрезке $[4;16]$.

Ответ:____________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\cos x+2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}\sin 2x-1$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;\ -\frac{7\pi}{2}\right]$.

13 Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S, причём A и C диаметрально противоположны. Точка M — середина BC.

а) Докажите, что прямая SM образует с плоскостью ABC такой же угол, как и прямая AB с плоскостью SBC.

б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC, если $AB=6$, $BC=8$ и $SC=5\sqrt{2}$.

14 Решите неравенство $4\log_4^2\left(\sin^3 x\right)+8\log_2(\sin x)\geq 1$.

15 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 8 млн рублей.

16 На гипотенузе AB и катетах BC и AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки M, N и K соответственно, причём прямая NK параллельна прямой AB и $BM=BN=\frac{1}{2}KN$. Точка P — середина отрезка KN.

а) Докажите, что четырёхугольник $BCPM$ — равнобедренная трапеция.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $BM=1$ и $\angle BCM=15°$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay-ax+2)(y-x+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

18 Известно, что в кошельке лежало n монет, каждая из которых могла быть достоинством 2, 5 или 10 рублей. Аня сделала все свои покупки, расплатившись за каждую покупку отдельно без сдачи только этими монетами, потратив при этом все монеты из кошелька.

а) Могли ли все её покупки состоять из блокнота за 56 рублей и ручки за 29 рублей, если $n=14$?

б) Могли ли все её покупки состоять из чашки чая за 10 рублей, сырка за 15 рублей и пирожка за 20 рублей, если $n=19$?

в) Какое наименьшее количество пятирублёвых монет могло быть в кошельке, если Аня купила только альбом за 85 рублей и $n=24$?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 32

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

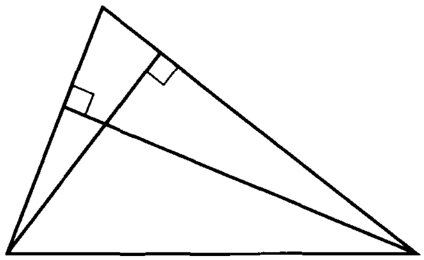
1 Найдите корень уравнения $8^{x-3}=16^{2x}$.

Ответ:__________________.

2 На олимпиаде по русскому языку 400 участников размещают в трёх аудиториях: в первых двух — по 130 человека, а оставшихся — в третьей аудитории. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник попадёт в третью аудиторию.

Ответ:__________________.

3 Два угла треугольника равны 68° и 35°. Найдите тупой угол, который образуют высоты треугольника, выходящие из вершин этих углов. Ответ дайте в градусах.

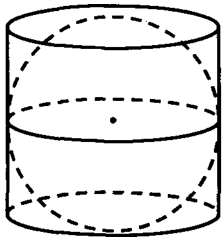


Ответ:__________________.

4 Найдите значение выражения $\dfrac{10\cos 105^\circ}{\sin 15^\circ \cdot \cos 60^\circ}$.

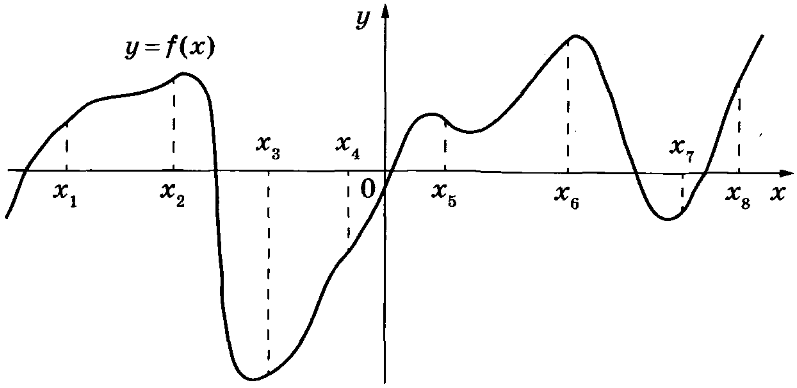
Ответ:__________________.

5 Шар вписан в цилиндр. Площадь поверхности шара равна 26. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.



Ответ:__________________.

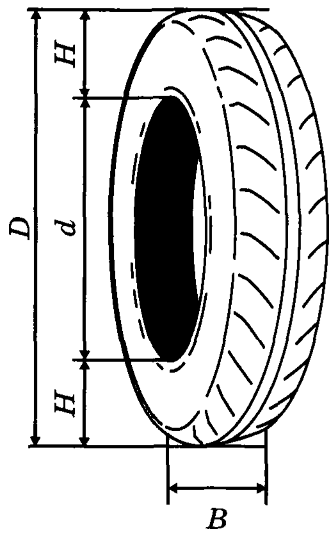
6 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечено восемь точек: x_1, x_2, ..., x_8. Найдите количество точек, в которых производная функции $f(x)$ положительна.



Ответ:__________________.

7 На автомобильной шине с помощью специальной маркировки указаны её размеры. Например, 265/60R18. Первое число означает ширину шины B в миллиметрах (см. рисунок). Второе число означает отношение высоты профиля шины H к ширине шины в процентах. Буква означает конструкцию шины (R — радиальный тип), а последнее число означает диаметр обода колеса d в дюймах.

На автомобиль «Лада-Калина» завод устанавливает шины с маркировкой 185/60R14. Найдите диаметр колеса D этого автомобиля. В одном дюйме 25,4 мм. Ответ дайте в сантиметрах с округлением до целого.

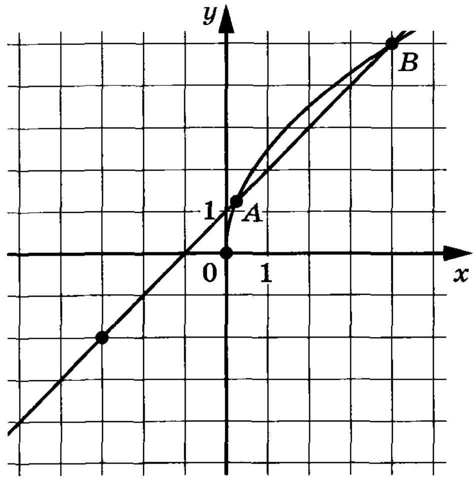


Ответ:__________________.

8 Автомобиль выехал с постоянной скоростью 72 км/ч из города A в город B, расстояние между которыми равно 246 км. Одновременно с ним из города C в город B, расстояние между которыми равно 221 км, с постоянной скоростью выехал мотоциклист. По дороге он сделал остановку на 35 минут. В результате автомобиль и мотоцикл прибыли в город B одновременно. Найдите скорость мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:__________________.

9 На рисунке изображены графики функций $f(x)=a\sqrt{x}$ и $g(x)=kx+b$, которые пересекаются в точках $A(x_0; y_0)$ и $B(4; 5)$. Найдите y_0.



Ответ:___________________.

10 За круглый стол на 6 стульев в случайном порядке рассаживаются 3 мальчика и 3 девочки. Найдите вероятность того, что все три девочки будут сидеть рядом.

Ответ:___________________.

11 Найдите наименьшее значение функции $y=5x-\ln(5x)+12$ на отрезке $\left[\frac{1}{10}; \frac{1}{2}\right]$.

Ответ:___________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\sin x+\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)=\cos 2x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi; \frac{11\pi}{2}\right]$.

13 Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S, причём A и C диаметрально противоположны. Точка M — середина BC.

а) Докажите, что прямая SM образует с плоскостью ABC такой же угол, как и прямая AB с плоскостью SBC.

б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC, если $AB=4$, $BC=6$ и $SC=4\sqrt{2}$.

14 Решите неравенство $20\log_4^2(\cos x)+4\log_2(\cos x)\leq 1$.

15 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 25 % по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 9 млн рублей.

16 На гипотенузе AB и катетах BC и AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки M, N и K соответственно, причём прямая NK параллельна прямой AB и $BM=BN=\frac{1}{2}KN$. Точка P — середина отрезка KN.

а) Докажите, что четырёхугольник $BCPM$ — равнобедренная трапеция.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $BM=2$ и $\angle BCM=30°$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay-ax+2)(y-x+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет ровно восемь решений.

18 Известно, что в кошельке лежало n монет, каждая из которых могла быть достоинством 2, 5 или 10 рублей. Таня сделала все свои покупки, расплатившись за каждую покупку отдельно без сдачи только этими монетами, потратив при этом все монеты из кошелька.

а) Могли ли все её покупки состоять из блокнота за 64 рубля и ручки за 31 рубль, если $n=16$?

б) Могли ли все её покупки состоять из стакана компота за 15 рублей, сырка за 20 рублей и булочки за 25 рублей, если $n=26$?

в) Какое наименьшее количество пятирублёвых монет могло быть в кошельке, если Таня купила только альбом за 96 рублей и $n=19$?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 33

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

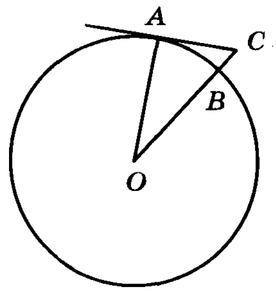
1 Найдите корень уравнения $\sqrt{3x+49}=10$.

Ответ:__________________.

2 В фирме такси в наличии 25 легковых автомобилей: 13 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ:__________________.

3 Найдите угол ACO, если его сторона CA касается окружности с центром O, отрезок CO пересекает окружность в точке B (см. рисунок), а дуга AB окружности, заключённая внутри этого угла, равна 17°. Ответ дайте в градусах.

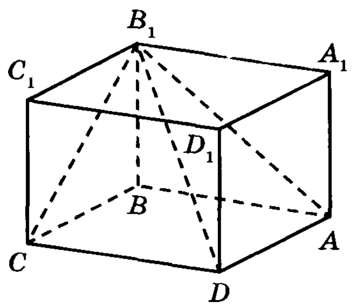


Ответ:__________________.

4 Найдите значение выражения $\dfrac{81^{2,6}}{9^{3,7}}$.

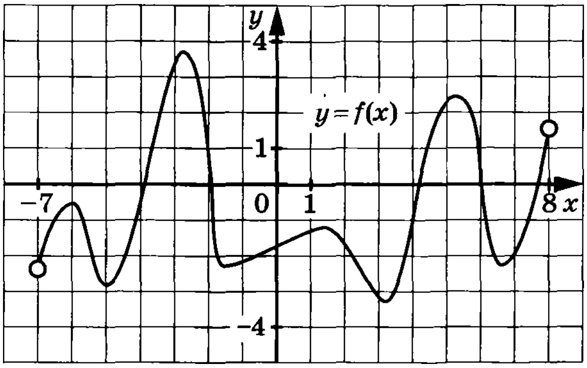
Ответ:__________________.

5 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, D, B_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB=9$, $BC=3$, $BB_1=8$.



Ответ:__________________.

6 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-7; 8)$. $F(x)$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $F(x)$ параллельна прямой $y = -x + 2$ или совпадает с ней.



Ответ:___________________.

7 В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где H — высота столба воды в метрах, $H_0 = 8$ м — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{72}$ м/мин^2 и $b = -\frac{2}{3}$ м/мин — постоянные, t — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. Сколько минут вода будет вытекать из бака?

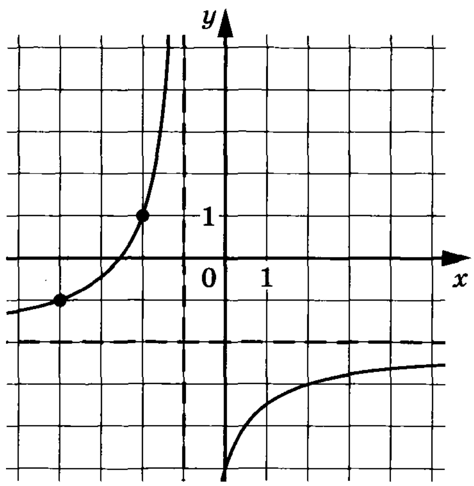
Ответ:___________________.

8 Два велосипедиста одновременно отправились в 140-километровый пробег. Первый ехал со скоростью на 4 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:___________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{kx + a}{x + b}$. Найдите k.

Ответ:___________________.



10 В коробке 8 синих, 9 красных и 8 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Ответ:___________________.

11 Найдите наибольшее значение функции $y=\ln(8x)-8x+7$ на отрезке $\left[\frac{1}{16};\ \frac{5}{16}\right]$.

Ответ:___________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\left((0{,}04)^{\sin x}\right)^{\cos x} = 5^{-\sqrt{3}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

13 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки B, A_1 и D_1.

б) Найдите угол между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1.

14 Решите неравенство $\log_2\left(x^2-2\right)-\log_2 x \le \log_2\left(x-\frac{2}{x^2}\right)$.

15 15 июня планируется взять кредит в банке на сумму 1300 тысяч рублей на 16 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 11-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\,\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 15-й долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— 15-го числа 15-го месяца долг составит 100 тысяч рублей;
— к 15-му числу 16-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1636 тысяч рублей.

16 Окружность с центром в точке O пересекает каждую из сторон трапеции $ABCD$ в двух точках. Четыре получившиеся хорды окружности равны.

а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной точке.

б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK = 19$, $KL = 12$, $LB = 3$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(a+1)(x^2+y^2)+(a-1)x+(a+1)y+2=0,\\ xy-1=x-y\end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

18 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 12 раз больше, либо в 12 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 8750.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 34

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

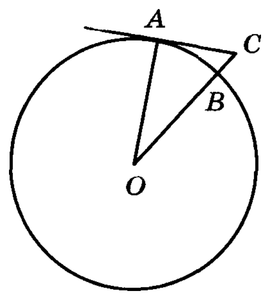
1 Найдите корень уравнения $4^{x-7}=\frac{1}{64}$.

Ответ:_________________.

2 В фирме такси в наличии 20 легковых автомобилей: 3 из них чёрного цвета с жёлтыми надписями на бортах, остальные — жёлтого цвета с чёрными надписями. Найдите вероятность того, что на случайный вызов приедет машина жёлтого цвета с чёрными надписями.

Ответ:_________________.

3 Угол ACO равен 62°. Его сторона CA касается окружности с центром в точке O. Отрезок CO пересекает окружность в точке B (см. рисунок). Найдите градусную меру дуги AB окружности, заключённой внутри этого угла. Ответ дайте в градусах.

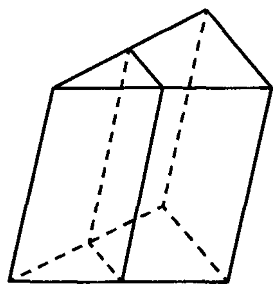


Ответ:_________________.

4 Найдите значение выражения $4^{\frac{1}{5}}\cdot 16^{\frac{9}{10}}$.

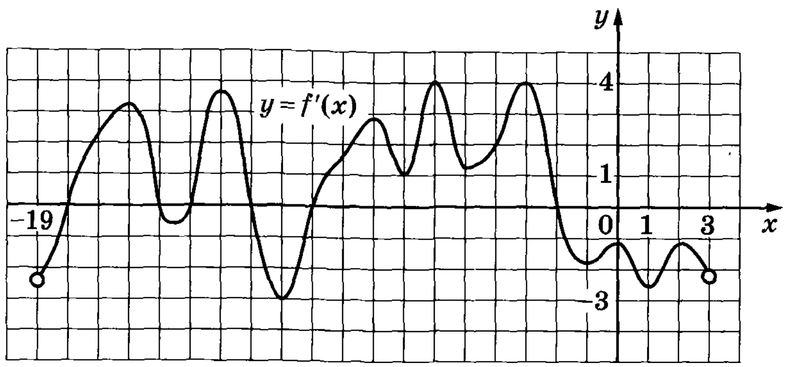
Ответ:_________________.

5 Через среднюю линию основания треугольной призмы, объём которой равен 52, проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объём отсечённой треугольной призмы.



Ответ:_________________.

6 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-19; 3)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-17; -4]$.



Ответ:__________________.

7 Сила тока I (в А) в электросети вычисляется по закону Ома: $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение электросети (в В), R — сопротивление подключаемого электроприбора (в Ом). Электросеть прекращает работать, если сила тока превышает 5 А. Определите, какое наименьшее сопротивление может быть у электроприбора, подключаемого к электросети с напряжением 220 В, чтобы электросеть продолжала работать. Ответ дайте в омах.

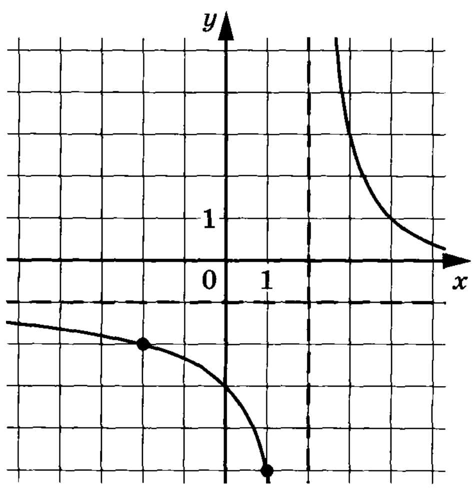
Ответ:__________________.

8 Расстояние между городами A и B равно 500 км. Из города A в город B выехал первый автомобиль, а через час после этого навстречу ему из города B выехал со скоростью 80 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 260 км от города A. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:__________________.

9 На рисунке изображён график функции $f(x) = \frac{kx + a}{x + b}$. Найдите a.

Ответ:__________________.



10 В коробке 7 синих, 6 красных и 2 зелёных фломастера. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Ответ:__________________.

11 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+9)^5 - 5x$ на отрезке $[-8{,}5;\ 0]$.

Ответ:__________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\left((0{,}25)^{\sin x}\right)^{\cos x} = 2^{-\sqrt{2}\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

13 Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через середины его рёбер AB, B_1C_1, AD.

б) Найдите угол между плоскостью A_1BD и плоскостью, проходящей через середины рёбер AB, B_1C_1, AD.

14 Решите неравенство $\log_5\left(2-\dfrac{2}{x}\right)-\log_5(x+3)\ge\log_5\left(\dfrac{x+3}{x^2}\right)$.

15 15 мая планируется взять кредит в банке на 17 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по 16-й долг должен быть на 50 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— к 15-му числу 17-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1472 тысячи рублей?

16 Окружность с центром в точке O пересекает каждую из сторон трапеции $ABCD$ в двух точках. Четыре получившиеся хорды окружности равны.

а) Докажите, что биссектрисы всех углов трапеции пересекаются в одной точке.
б) Найдите высоту трапеции, если окружность пересекает боковую сторону AB в точках K и L так, что $AK=13$, $KL=6$, $LB=1$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} a\left(x^2+y^2\right)-ax+(a-3)y+1=0, \\ xy-1=y-x \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

18 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 14 раз больше, либо в 14 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 7424.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?
б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?
в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 35

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

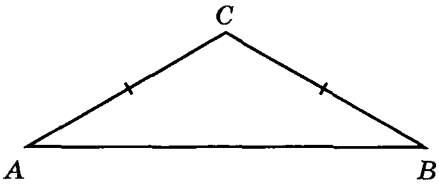
1 Найдите корень уравнения $\sqrt{15-2x}=x$.
Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ:___________________.

2 На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран, в том числе группы из Франции, США и Канады. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Франции будет выступать позже группы из США, но перед группой из Канады? Ответ округлите до сотых.

Ответ:___________________.

3 В треугольнике ABC известно, что $AC=BC$, $AB=20$, $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{3}$. Найдите длину стороны AC.

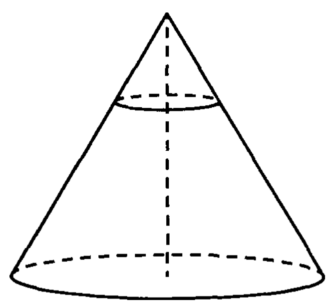


Ответ:___________________.

4 Найдите значение выражения $\log_3 32\cdot\log_2 9$.

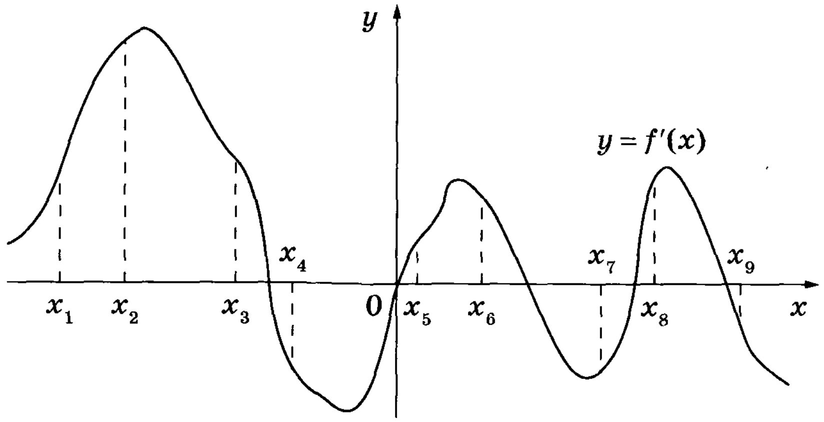
Ответ:___________________.

5 Площадь боковой поверхности конуса равна 30. Параллельно основанию конуса проведено сечение, делящее высоту в отношении $2:3$, считая от вершины конуса. Найдите площадь боковой поверхности отсечённого конуса.



Ответ:___________________.

6 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечено девять точек: x_1, x_2, ..., x_9. Найдите количество точек, лежащих на промежутках возрастания функции $f(x)$.



Ответ:__________________.

7 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в К) от времени работы:

$$T(t) = T_0 + bt + at^2,$$

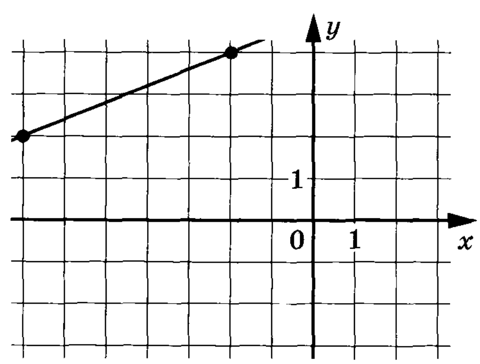
где t — время (в мин.), $T_0 = 1600$ К, $a = -5$ К/мин^2, $b = 105$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1870 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Ответ:__________________.

8 От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 208 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 3 часа после этого следом за ним со скоростью на 3 км/ч большей отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Ответ:__________________.

9 На рисунке изображена часть графика функции $f(x) = k|x| + b$. Найдите $f(10)$.



Ответ:__________________.

10 В викторине участвуют 6 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых трёх играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет четвёртый раунд?

Ответ:__________________.

11 Найдите точку максимума функции $y=(x+7)^2\cdot e^{-1-x}$.

Ответ:__________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\dfrac{4}{\sin^2\left(\dfrac{7\pi}{2}-x\right)}-\dfrac{11}{\cos x}+6=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1. Точка F — середина ребра AS.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей SAD и BCF.

б) Найдите угол между плоскостями SAD и BCF.

14 Решите неравенство $9^{x+\frac{1}{9}}-4\cdot 3^{x+\frac{10}{9}}+27\ge 0.$

15 15 января планируется взять кредит в банке на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что в течение второго года кредитования нужно вернуть банку 339 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года кредитования?

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E, а окружность — в точке F, причём H — середина AE.

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 5$ и $AH = 4$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 3|x - a^2| - 5x$$

имеет более двух точек экстремума.

18 В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40 000 рублей, а оставшиеся деньги поделить поровну на 70 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ВАРИАНТ 36

Часть 1

Ответом к заданиям 1–11 является целое число или конечная десятичная дробь. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

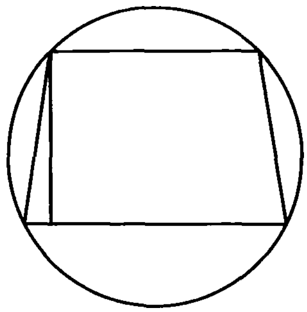
1 Найдите корень уравнения $\sqrt{\frac{6}{4x-54}}=\frac{1}{7}$.

Ответ:__________________.

2 На рок-фестивале выступают группы — по одной от каждой из заявленных стран, в том числе группы из Италии, Германии, Австрии и Испании. Порядок выступления определяется жребием. Какова вероятность того, что группа из Германии будет выступать позже групп из Италии, Австрии и Испании? Ответ округлите до сотых.

Ответ:__________________.

3 Основания равнобедренной трапеции равны 24 и 10. Радиус описанной окружности равен 13. Центр окружности лежит внутри трапеции. Найдите высоту трапеции.

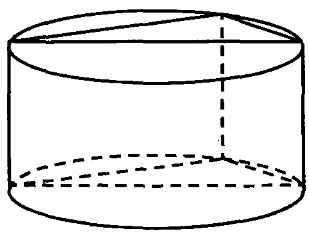


Ответ:__________________.

4 Найдите значение выражения $3^{2+\log_3 7}$.

Ответ:__________________.

5 В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 5 и 6. Боковые рёбра призмы равны $\frac{4}{\pi}$. Найдите объём цилиндра, описанного около этой призмы.



Ответ:__________________.

6 Прямая $y = -5x + 6$ является касательной к графику функции $28x^2 + 23x + c$. Найдите c.

Ответ:__________________.

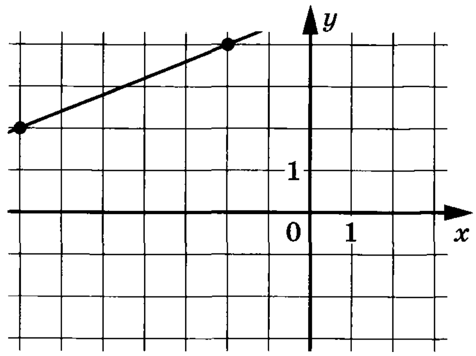
7 Груз массой 0,58 кг колеблется на пружине. Его скорость v (в м/с) меняется по закону $v = v_0 \sin\frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний в секундах, $T = 6$ с — период колебаний, $v_0 = 2$ м/с. Кинетическая энергия E (в Дж) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза (в кг), v — скорость груза (в м/с). Найдите кинетическую энергию груза через 4 секунды после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Ответ:__________________.

8 Каждый из двух рабочих одинаковой квалификации может выполнить заказ за 21 час. Через 5 часов после того, как один из них приступил к выполнению заказа, к нему присоединился второй рабочий, и работу над заказом они довели до конца уже вместе. Сколько часов потребовалось на выполнение всего заказа?

Ответ:__________________.

9 На рисунке изображена часть графика функции $f(x) = |kx + b|$. Найдите $f(-15)$.



Ответ:__________________.

10 В викторине участвуют 15 команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых 8 играх победила команда А. Какова вероятность того, что эта команда выиграет девятый раунд?

Ответ:__________________.

11 Найдите наименьшее значение функции $y=6+\frac{\sqrt{3}\pi}{2}-3\sqrt{3}x-6\sqrt{3}\cos x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ:____________________.

! ***Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.***
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12 а) Решите уравнение $\cos 4x-\sin 2x=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0;\pi]$.

13 В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны 1. Точка F — середина ребра SB, G — середина ребра SC.

а) Постройте прямую пересечения плоскостей ABG и GDF.
б) Найдите угол между плоскостями ABG и GDF.

14 Решите неравенство $9^x-10\cdot 3^{x+1}+81\geq 0$.

15 31 декабря 2014 года Михаил взял в банке некоторую сумму в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Михаил переводит в банк 2 928 200 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём сторона CD — диаметр этой окружности. Продолжение перпендикуляра AH к диагонали BD пересекает сторону CD в точке E, а окружность — в точке F, причём H — середина AE.

а) Докажите, что четырёхугольник $BCFE$ — параллелограмм.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известно, что $AB = 6$ и $AH = 2\sqrt{5}$.

17 Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 4|x - a^2| - 8x$$

имеет хотя бы одну точку максимума.

18 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел -1, 3, 4, -5, 7, -9, -10, 11. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел -1, 3, 4, -5, 7, -9, -10, 11. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

! ***Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.***

ОТВЕТЫ

Каждое из заданий 1–11 считается выполненным верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Верный ответ на каждое задание оценивается 1 баллом.

Вариант 1

№ задания	Ответ
1	−0,2
2	0,25
3	−0,7
4	−5
5	72
6	−1
7	50
8	17,5
9	78
10	0,043
11	6,75
12	а) πk, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi p$, $p\in\mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$. б) $-\frac{19\pi}{6}$; -3π; $-\frac{17\pi}{6}$
13	б) $80\sqrt{3}$
14	$(-\infty; 0]$; $[2; 3]$
15	600 тыс. рублей
16	б) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$
17	$(-1; 0)$; -5
18	а) да; б) нет; в) 97

Вариант 2

№ задания	Ответ
1	−1,5
2	0,55
3	0,75
4	−4
5	24
6	4
7	40
8	13,5
9	−23
10	0,02
11	6,25
12	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{2}$; $\frac{19\pi}{4}$; $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{2}$
13	б) 150
14	$(-\infty; 0)$; $(\log_5 3; 1)$
15	750 тыс. рублей
16	$\frac{25\sqrt{39}}{64}$
17	$a<-2$; $-2<a\le-\frac{2}{3}$; $a>0$
18	а) да; б) нет; в) 85

Вариант 3

№ задания	Ответ
1	-9
2	0,4
3	8
4	0,5
5	48
6	4
7	33
8	9
9	$-0{,}5$
10	0,6
11	77
12	а) -2; -1; б) -1
13	$5\sqrt{3}$
14	$(1; 3]$
15	37
16	б) $\frac{120}{13}$
17	$[4\sqrt{3}; 12]$
18	а) да; б) нет; в) $\frac{23}{20}$

Вариант 4

№ задания	Ответ
1	-2
2	0,28
3	14
4	0,04
5	40,5
6	39
7	23
8	24
9	0,4
10	0,78
11	37
12	а) 1; $\log_{2,5}4$; б) 1; $\log_{2,5}4$
13	$1\frac{11}{13}$
14	$[-3; -1)$
15	3
16	б) 4
17	$(0; 0{,}4]$; $\left[2\sqrt[3]{5}; +\infty\right]$
18	а) да; б) нет; в) $11\frac{5}{6}$

Вариант 5

№ задания	Ответ
1	−9
2	0,014
3	11,55
4	0,25
5	432
6	2
7	0,32
8	3
9	2,5
10	0,06
11	208
12	а) πk, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) -3π; $-\frac{11\pi}{4}$; -2π
13	$\arccos\frac{2\sqrt{210}}{35}$
14	$(-1; 0)$
15	16
16	б) 6
17	$\left[1-1{,}5\sqrt[3]{4}; 0\right]$
18	а) да; б) нет; в) 26

Вариант 6

№ задания	Ответ
1	−8
2	0,29
3	12
4	0,125
5	192
6	4
7	1,16
8	1
9	−15
10	0,02
11	5
12	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{15\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{2}$
13	$\arccos\frac{2\sqrt{210}}{35}$
14	$(-\infty; -0{,}5)$
15	19
16	б) 8
17	$\left[-1; 1{,}5\sqrt[3]{4}-2\right]$
18	а) да; б) нет; в) 80

Вариант 7

№ задания	Ответ
1	−2,5
2	0,08
3	10
4	216
5	80
6	−2
7	175
8	18
9	16
10	0,2
11	−24
12	а) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; б) -3π; $-\frac{7\pi}{3}$; -2π
13	б) 45°
14	$\left(-\infty; -\sqrt[4]{8}\right]$; $[-0,5; 0)$; $(0; 0,5]$; $\left[\sqrt[4]{8}; +\infty\right)$
15	29
16	$\frac{5}{3}$
17	$-\frac{1}{2}$; 2
18	а) нет; б) да; в) 306

Вариант 8

№ задания	Ответ
1	−0,2
2	0,2
3	35
4	3,5
5	10
6	28
7	43,75
8	21
9	2,25
10	0,24
11	−15
12	а) $\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $\frac{2\pi}{3} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{2}$; $-\frac{10\pi}{3}$
13	б) arctg 0,5
14	$\left[-\sqrt[4]{5}; -0,04\right]$; $\left[0,04; \sqrt[4]{5}\right]$
15	24
16	2,4
17	1; 9
18	а) нет; б) да; в) 552

Вариант 9

№ задания	Ответ
1	−1,5
2	0,25
3	2,5
4	1
5	7,28
6	0,2
7	115
8	135
9	2
10	0,973
11	−34
12	а) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $3\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
13	$0{,}3\sqrt{30}$
14	$(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$
15	1300 тыс. рублей
16	71°
17	$\left(-\frac{15}{7};-\frac{1}{2}\right]$; $\left[\frac{8}{7};\frac{15}{7}\right)$
18	а) нет; б) нет; в) $11\frac{2}{11}$

Вариант 10

№ задания	Ответ
1	−4,5
2	0,75
3	6
4	10
5	7,68
6	−0,25
7	220
8	52
9	27
10	0,9744
11	0
12	а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $4\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
13	arctg 2
14	$[-5;\ 0)\cup(0;\ 2{,}5]$
15	2541 тыс. рублей
16	$3\frac{1}{3}$
17	$\left(-\frac{6}{7};0\right]$; $\frac{9}{7}$; $\left(\frac{3}{2};\frac{24}{7}\right)$
18	а) 42; б) положительных; в) 24

Вариант 11

№ задания	Ответ
1	5,5
2	0,2
3	113
4	324
5	60
6	2
7	6250
8	14
9	15
10	0,22
11	7
12	а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ -\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$ б) $\frac{7\pi}{2};\ \frac{15\pi}{4};\ \frac{9\pi}{2}$
13	$\frac{9\sqrt{5}}{4}$
14	$(-\infty;-2\sqrt{3}];\ [1;\ 1{,}5)$
15	500 тыс. рублей
16	4,8
17	$a<-2;\ -2<a<-\frac{1}{2};\ a=0;$ $\frac{1}{2}<a<2;\ a>2$
18	а) да; б) нет; в) $\frac{232}{21}$

Вариант 12

№ задания	Ответ
1	11
2	0,3
3	0,75
4	−7,5
5	45
6	7
7	1,3
8	5
9	3,4
10	0,27
11	1,2
12	а) $\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ -\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$ $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z};$ б) $\frac{7\pi}{4};\ 2\pi;\ 3\pi$
13	$\arccos\frac{14}{55}$
14	$(-\infty;-4];\ [-\sqrt{10};-3)$
15	20
16	7,5
17	$1\le a<9$
18	а) да; б) нет; в) 10

Вариант 13

№ задания	Ответ
1	-2
2	0,25
3	62
4	80
5	25
6	6
7	60
8	75
9	28
10	0,3
11	18
12	а) $-1-\sqrt{2}$; $-1-\sqrt{3}$; б) $-1-\sqrt{2}$
13	$\frac{9\sqrt{3}}{4}$
14	$(-\infty;-1)$; 0; $(0{,}5;+\infty)$
15	35 700 рублей
16	$\frac{5\sqrt{26}}{6}$
17	$\left(-\frac{9}{16};-0{,}5\right)$; $(-0{,}5;0)$; $(0;2)$; $(2;+\infty)$
18	а) 7; б) 15; в) 14

Вариант 14

№ задания	Ответ
1	0
2	0,2
3	78
4	28
5	20
6	6
7	30
8	10
9	-28
10	0,82
11	-2
12	а) $-2-\sqrt{6}$, $-2+\sqrt{6}$, $\frac{1}{2}-\frac{\log_2 3}{6}$; б) $-2+\sqrt{6}$, $\frac{1}{2}-\frac{\log_2 3}{6}$
13	$\frac{30\sqrt{17}}{7}$
14	$\left[-6;-\sqrt{26{,}1}\right]$; $\left[-\sqrt{25{,}9};-4\right]$; $\left[4;\sqrt{25{,}9}\right]$; $\left[\sqrt{26{,}1};6\right]$
15	53 820 рублей
16	$\frac{6\sqrt{13}}{5}$
17	$\left(-\frac{25}{16};-1{,}5\right)$; $(-1{,}5;0)$; $\left(0;3\frac{1}{6}\right)$; $\left(3\frac{1}{6};+\infty\right)$
18	а) 12; б) 15; в) 6

Вариант 15

№ задания	Ответ
1	0,8
2	0,18
3	37
4	0,4
5	135
6	−0,2
7	6
8	35
9	−0,4
10	3
11	14
12	а) $\pi+2\pi k,\ -\frac{\pi}{3}+4\pi k,\ -\frac{5\pi}{3}+4\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\pi;\ -\frac{\pi}{3};\ \pi$
13	36
14	$\left[\sqrt[4]{2}-2;+\infty\right);\ -1$
15	1 080 000 рублей
16	$\frac{378-84\sqrt{3}}{23}$
17	$6+2\sqrt{57};\ \left(21\frac{1}{3};+\infty\right)$
18	а) нет; б) 21; в) 82

Вариант 16

№ задания	Ответ
1	−4
2	0,38
3	53
4	−0,3
5	72
6	−0,75
7	96
8	28
9	−13
10	5
11	1
12	а) $-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \frac{\pi}{3}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{3};\ -\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{3}$
13	189
14	$(-0,5;\ 0,5);\ (0,5;\ 624,5)$
15	1 706 400 рублей
16	$91(5\sqrt{2}-7)$
17	$\left(2\sqrt{11}-2;\ 5\frac{5}{6}\right];\ 2+2\sqrt{11}$
18	а) нет; б) 36; в) 182

Вариант 17

№ задания	Ответ
1	4
2	0,14
3	29
4	2,72
5	315
6	6
7	7
8	77
9	76
10	0,03
11	−3
12	а) $-\frac{\pi}{12}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{12}$; $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{11\pi}{12}$
13	45°
14	$(-1;0)$; $\log_5 3$
15	54 925 рублей
16	8
17	$[0;1{,}5)$; $[2;+\infty)$
18	а) да; б) нет; в) 16

Вариант 18

№ задания	Ответ
1	−1
2	0,375
3	6
4	−3
5	176
6	−3
7	28
8	6
9	−5
10	0,012
11	38
12	а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{13\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{4}$
13	$\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{21}}{7}$
14	$(-\infty;-2\sqrt{26}]$; $[-\sqrt{4{,}01};-2)$; $(-2;-\sqrt{3{,}99}]$; $[\sqrt{3{,}99};2)$; $(2;\sqrt{4{,}01}]$; $[2\sqrt{26};+\infty)$
15	78 125 рублей
16	18
17	$\left(-1{,}5;-\frac{9}{8}\right]$
18	а) да; б) нет; в) 12

Вариант 19

№ задания	Ответ
1	3
2	0,24
3	60
4	4
5	18
6	4
7	6,5
8	6,4
9	67
10	0,2
11	−21
12	а) $\frac{\pi}{6}k$, $\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k$, $-\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}k$, где $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{18}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{11\pi}{18}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{7\pi}{18}$; $-\frac{\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{18}$
13	$36+30\sqrt{2}$
14	$[2;5)$
15	126 694,4 рубля
16	1
17	$a\le-3$; $a=-\frac{1}{3}$; $a=0$; $a=\frac{1}{3}$; $a\ge3$
18	а) да; б) нет; в) 2805

Вариант 20

№ задания	Ответ
1	4
2	0,28
3	64
4	8
5	4
6	14
7	9,6
8	22
9	3
10	0,6
11	−8
12	а) $\frac{\pi}{4}k$, $\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k$, $-\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{2}k$, где $k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{65\pi}{24}$; $\frac{11\pi}{4}$; $\frac{67\pi}{24}$; 3π; $\frac{77\pi}{24}$; $\frac{13\pi}{4}$; $\frac{79\pi}{24}$
13	$\frac{5\sqrt{119}}{13}$
14	$(0;5]$
15	1-й объект — 7 человек, 2-й объект — 23 человека; 43 150 рублей
16	50
17	$4<a\le16$
18	а) да; б) нет; в) 2220

Вариант 21

№ задания	Ответ
1	2
2	0,98
3	6,5
4	−10
5	54
6	2
7	25
8	54
9	−7
10	0,2
11	8
12	а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{4}$; $-\frac{17\pi}{4}$
13	$\arccos\frac{31\sqrt{10}}{140}$
14	$[-2; 2)$
15	39
16	$9\sqrt{2}$
17	$-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$
18	а) нет; б) нет; в) 676 г

Вариант 22

№ задания	Ответ
1	−2
2	0,024
3	30
4	91
5	27
6	3
7	17
8	12
9	13
10	0,15
11	−9
12	а) $\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$
13	$\frac{5\sqrt{17}}{8}$
14	$(-2; 1)$; $(1; 2)$
15	1,6 млн рублей
16	$27\sqrt{3}$
17	$a<0$; $0<a<3$; $3<a<4$; $4<a<5$; $5<a<6$
18	а) нет; б) нет; в) 240 г

Вариант 23

№ задания	Ответ
1	−5
2	0,28
3	72,5
4	65
5	47
6	3
7	8
8	48
9	−2,5
10	0,097
11	26
12	а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{23\pi}{4}$; $\frac{25\pi}{4}$
13	$13\sqrt{6}$
14	$\left[-\sqrt{\frac{\log_{2,5}6}{2}};\ \sqrt{\frac{\log_{2,5}6}{2}}\right]$
15	2,58
16	5 : 7
17	$\left(-\frac{2\sqrt{3}-1}{2};\ -\frac{\sqrt{10}-1}{2}\right)\cup\left(-\frac{\sqrt{10}-1}{2};\ -1\right)$; $-\frac{3}{4}$; $\frac{1}{2}$
18	а) нет; б) нет; в) 3

Вариант 24

№ задания	Ответ
1	6
2	0,16
3	68
4	16
5	76
6	6
7	633
8	64
9	−0,25
10	0,068
11	−1
12	а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{10\pi}{3}$; $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$
13	48,5
14	$\left[-\log_{1,25}\frac{3}{2};\ -1\right]$
15	4,05
16	10 : 11
17	$-\frac{\sqrt{10}+1}{9}$; $\frac{\sqrt{10}-1}{9}$; $[1{,}4;\ 2)$
18	а) да; б) нет; в) 5

Вариант 25

№ задания	Ответ
1	−2
2	0,56
3	21
4	7,5
5	200
6	0,5
7	0,31
8	20
9	0,75
10	0,9
11	9
12	а) πn, $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{4}$; -3π; $-\frac{11\pi}{4}$
13	$4\sqrt{3}$
14	$\left[3-\sqrt{5};\ 2{,}8\right]\cup\left[3{,}2;\ 3+\sqrt{5}\right]$
15	20
16	1 : 3 : 1
17	[−3; 22]
18	а) да; б) 180; в) 546

Вариант 26

№ задания	Ответ
1	−5
2	0,12
3	35
4	2,5
5	88
6	5,5
7	1,728
8	756
9	−0,5
10	12
11	30
12	а) $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{14\pi}{3}$; $-\frac{9\pi}{2}$; $-\frac{13\pi}{3}$
13	$6\sqrt{3}$
14	$\left(-\infty;\ 4-2\sqrt{2}\right]\cup\left[3{,}5;\ 4\right)\cup\left(4;\ 4{,}5\right]\cup\left[4+2\sqrt{2};\ +\infty\right)$
15	3
16	4 : 5 : 4
17	(−∞; −3); (−3; −1]; 1; [3,25; +∞)
18	а) да; б) 270; в) 17

Вариант 27

№ задания	Ответ
1	1,5
2	0,2
3	13
4	1
5	10,5
6	6
7	0,32
8	5
9	8
10	0,343
11	−81
12	а) $-\log_2 3$; $\log_2 1{,}5$; б) $\log_2 1{,}5$
13	$\frac{5\sqrt{17}}{2}$
14	$\left[-\frac{1}{2};\ 0\right)\cup(2;\ 3]$
15	7 и 12 млн рублей
16	44
17	$\left[-2;\ -\frac{4}{3}\right)\cup[2;\ 4)$
18	а) да; б) да; в) 20

Вариант 28

№ задания	Ответ
1	0,75
2	0,375
3	165
4	−1
5	216
6	3
7	60
8	3
9	34
10	0,064
11	1,5
12	а) $-\log_5 2$; $-\log_5 10$; б) $-\log_5 10$
13	$5\sqrt{5}$
14	$[2;\ +\infty)$ или -3
15	7 и 3 млн рублей
16	13,5
17	$(-\infty;\ -3]\cup(0;\ 3]$
18	а) да; б) да; в) 10

Вариант 29

№ задания	Ответ
1	–1
2	0,2
3	2
4	9
5	96
6	11
7	0,006
8	7
9	27
10	0,36
11	–8
12	а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}4+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}4+3\pi$
13	1
14	[–1; +∞)
15	5,35
16	12
17	$a<-6$; $-6<a<-2$; $-2<a<0$; $0<a<\frac{1}{4}$
18	а) нет; б) да; в) 9×16 и 12×12; 3×12 и 6×6; 1×16 и 4×4

Вариант 30

№ задания	Ответ
1	–2
2	0,25
3	10
4	10
5	111
6	7
7	120
8	14
9	4
10	0,44
11	–18
12	а) $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}-3\pi$
13	$\sqrt{2}$
14	[–3; 1)
15	2 и 5 млн рублей
16	9
17	$-\frac{17}{4}<a<-2$; $-2<a<2$; $2<a<\frac{17}{4}$
18	а) нет; б) да; в) 4×9 и 6×6; 2×8 и 4×4; 1×9 и 3×3

Вариант 31

№ задания	Ответ
1	–8,25
2	0,15
3	86
4	81
5	24
6	–2
7	62
8	60
9	16
10	0,1
11	31
12	а) $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, где $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{14\pi}{3}$; $-\frac{9\pi}{2}$; $-\frac{7\pi}{2}$
13	$\arcsin\frac{3}{\sqrt{17}}$
14	$\left(2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi k; \pi+2\pi k\right)$, где $k\in\mathbb{Z}$
15	5 000 000 рублей
16	$\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$
17	$0<a<\frac{4}{9}$, $a>1$
18	а) да; б) нет; в) 7

Вариант 32

№ задания	Ответ
1	–1,8
2	0,35
3	103
4	–20
5	39
6	7
7	58
8	78
9	1,25
10	0,2
11	13
12	а) πk, $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; б) 4π; 5π; $\frac{13\pi}{3}$
13	$\arcsin\sqrt{\frac{19}{46}}$
14	$\left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right]$, где $k\in\mathbb{Z}$
15	5 000 000 рублей
16	$8\sqrt{3}$
17	$\frac{4}{9}<a<\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}<a<1$
18	а) да; б) нет; в) 6

Вариант 33

№ задания	Ответ
1	17
2	0,48
3	73
4	27
5	72
6	7
7	24
8	14
9	−2
10	0,24
11	6
12	а) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ \pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$ б) $3\pi;\ \frac{23\pi}{6};\ 4\pi$
13	$\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}$
14	$(\sqrt{2};\ +\infty)$
15	3
16	30
17	$(-3;\ -1)$
18	а) нет; б) да; в) 1347

Вариант 34

№ задания	Ответ
1	4
2	0,85
3	28
4	16
5	13
6	4
7	44
8	65
9	6
10	0,4
11	40
12	а) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};$ б) $2\pi;\ \frac{9\pi}{4};\ 3\pi$
13	$\operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$
14	$(-3;\ -1]\cup[9;+\infty)$
15	1 200 000 рублей
16	16
17	$(-\infty;\ 0);(16;\ +\infty)$
18	а) нет; б) да; в) 989

Вариант 35

№ задания	Ответ
1	3
2	0,33
3	15
4	10
5	4,8
6	6
7	3
8	13
9	0,8
10	0,8
11	−5
12	а) $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}$
13	$\arccos\frac{1}{\sqrt{33}}$
14	$\left(-\infty;\frac{8}{9}\right];\ \left[\frac{17}{9};+\infty\right)$
15	411 000 рублей
16	67,5
17	$-2 < a < -1;\ 1 < a < 2$
18	а) да; б) нет; в) 26

Вариант 36

№ задания	Ответ
1	87
2	0,25
3	17
4	63
5	61
6	13
7	0,87
8	13
9	1,2
10	0,9
11	−3
12	а) $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{12};\ \frac{5\pi}{12};\ \frac{3\pi}{4}$
13	$\pi-\arccos\frac{9}{11}$
14	$(-\infty;1];\ [3,+\infty)$
15	9 282 000 рублей
16	$42+18\sqrt{5}$
17	$-\sqrt{6} < a < -\sqrt{2};\ \sqrt{2} < a < \sqrt{6}$
18	а) нет; б) нет; в) 16

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЙ 12–18

Количество баллов, выставляемых за выполнение заданий 12–18, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, рекомендуемых к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

Вариант 1

12 а) Решите уравнение $2\sin^3(\pi+x)=\frac{1}{2}\cos\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$-2\sin^3 x=-\frac{1}{2}\sin x;$$

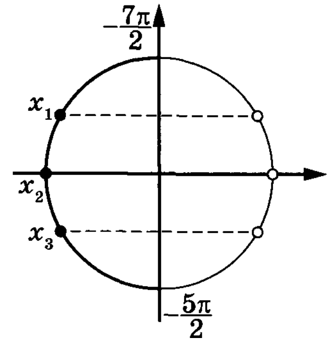
$$4\sin^3 x-\sin x=0;\ \sin x\cdot\left(4\sin^2 x-1\right)=0.$$

Значит, $\sin x=0$, откуда $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$;

или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$;

или $\sin x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi p,\ p\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-\frac{5\pi}{2}\right]$.



Получим

$$x_1 = -\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = -\frac{19\pi}{6};$$

$$x_2 = -\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -3\pi;$$

$$x_3 = -\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = -\frac{17\pi}{6}.$$

Ответ: а) πk, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

$-\frac{\pi}{6} + 2\pi p$, $p \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

б) $-\frac{19\pi}{6}$; -3π; $-\frac{17\pi}{6}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решением линейных неравенств и т. п.

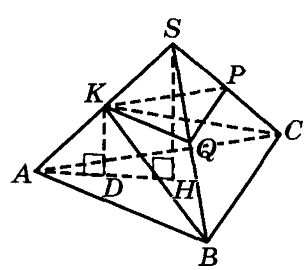
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

13 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 16, высота SH равна 10. Точка K — середина бокового ребра SA. Плоскость, параллельная плоскости ABC, проходит через точку K и пересекает рёбра SB и SC в точках Q и P соответственно.

а) Докажите, что площадь четырёхугольника $BCPQ$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SBC.

б) Найдите объём пирамиды $KBCPQ$.

Решение.



а) Прямая KQ лежит в плоскости KQP, параллельной плоскости ABC. Следовательно, прямые KQ и AB не имеют общих точек, а поскольку эти прямые лежат в одной и той же плоскости SAB, они параллельны. Тогда по теореме Фалеса точка Q — середина ребра SB. Аналогично точка P — середина ребра SC. Таким образом, отрезок QP — средняя линия треугольника SBC. Отсюда следует, что площадь треугольника SQP составляет четверть площади треугольника SBC, а тогда площадь четырёхугольника $BCPQ$ составляет $\frac{3}{4}$ площади треугольника SBC.

б) Пусть отрезок KD — высота пирамиды $KABC$. Прямые SH и KD параллельны, а точка K — середина отрезка SA, значит, отрезок KD является средней линией треугольника ASH и $KD=\frac{SH}{2}$.

Объём пирамиды $SABC$ равен $\frac{1}{3}\cdot SH\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot AB^2=\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot 10\cdot 16^2=\frac{640\sqrt{3}}{3}$. Объём пирамиды $KABC$ равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{SH}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\frac{320\sqrt{3}}{3}$.

Значит, объём пирамиды $KSBC$ равен $\frac{640\sqrt{3}}{3}-\frac{320\sqrt{3}}{3}=\frac{320\sqrt{3}}{3}$.

Пирамиды $KSBC$ и $KBCPQ$ имеют общую высоту, равную расстоянию h от точки K до плоскости SBC. Пусть S_1 — площадь треугольника SBC, тогда площадь четырёхугольника $BCPQ$ равна $\frac{3S_1}{4}$.

Объём пирамиды $KSBC$ равен $\frac{S_1h}{3}$. С другой стороны, он равен $\frac{320\sqrt{3}}{3}$, откуда $S_1h=320\sqrt{3}$.

Объём пирамиды $KBCPQ$ равен $\frac{1}{3}\cdot h\cdot\frac{3S_1}{4}=\frac{S_1h}{4}=80\sqrt{3}$.

Ответ: б) $80\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\left(4^x-5\cdot 2^x\right)^2-20\left(4^x-5\cdot 2^x\right)\le 96$.

Решение.

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\left(t^2-5t\right)^2-20\left(t^2-5t\right)-96\le 0;\ \left(t^2-5t-24\right)\left(t^2-5t+4\right)\le 0;$$

$$(t+3)(t-8)(t-1)(t-4)\le 0,$$

откуда $-3\le t\le 1;\ 4\le t\le 8$.

При $-3 \le t \le 1$ получим $-3 \le 2^x \le 1$, откуда $x \le 0$.

При $4 \le t \le 8$ получим $4 \le 2^x \le 8$, откуда $2 \le x \le 3$.

Решение исходного неравенства: $x \le 0$; $2 \le x \le 3$.

Ответ: $(-\infty; 0]$; $[2; 3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 0, 2 и/или 3, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на 8 лет. Условия его возврата таковы:

- в январе 2026, 2027, 2028 и 2029 годов долг возрастает на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- в январе 2030, 2031, 2032 и 2033 годов долг возрастает на 18 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
- к июлю 2033 года кредит должен быть полностью погашен.

Какую сумму планируется взять в кредит, если общая сумма выплат после полного его погашения составит 1125 тысяч рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S тысяч рублей. По условию, долг перед банком (в тыс. рублей) по состоянию на июль 2025–2033 годов должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$S;\ \frac{7S}{8};\ \frac{6S}{8};\ \frac{5S}{8};\ \frac{4S}{8};\ \frac{3S}{8};\ \frac{2S}{8};\ \frac{S}{8};\ 0.$$

В январе каждого года с 2026 по 2029 долг возрастает на 20 %, а в январе каждого года с 2030 по 2033 — на 18 %, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) в январе 2026–2033 годов такова:

$$1{,}2\cdot S;\ 1{,}2\cdot\frac{7S}{8};\ 1{,}2\cdot\frac{6S}{8};\ 1{,}2\cdot\frac{5S}{8};\ 1{,}18\cdot\frac{4S}{8};\ 1{,}18\cdot\frac{3S}{8};\ 1{,}18\cdot\frac{2S}{8};\ 1{,}18\cdot\frac{S}{8}.$$

Следовательно, выплаты (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$0{,}2\cdot S+\frac{S}{8};\ 0{,}2\cdot\frac{7S}{8}+\frac{S}{8};\ 0{,}2\cdot\frac{6S}{8}+\frac{S}{8};\ 0{,}2\cdot\frac{5S}{8}+\frac{S}{8};$$

$$0{,}18\cdot\frac{4S}{8}+\frac{S}{8};\ 0{,}18\cdot\frac{3S}{8}+\frac{S}{8};\ 0{,}18\cdot\frac{2S}{8}+\frac{S}{8};\ 0{,}18\cdot\frac{S}{8}+\frac{S}{8}.$$

Значит, общая сумма выплат (в тыс. рублей) составит

$$0{,}2\cdot\left(S+\frac{7S}{8}+\frac{6S}{8}+\frac{5S}{8}\right)+0{,}18\cdot\left(\frac{4S}{8}+\frac{3S}{8}+\frac{2S}{8}+\frac{S}{8}\right)+8\cdot\frac{S}{8}=$$

$$=0{,}2\cdot\frac{13S}{4}+0{,}18\cdot\frac{5S}{4}+S=1{,}875S,$$

откуда $1{,}875S=1125$; $S=600$.

Значит, сумма, взятая в кредит, равна 600 тыс. рублей.

Ответ: 600 тыс. рублей.

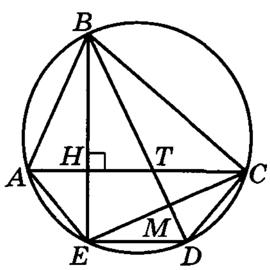
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Точки A, B, C, D и E лежат на окружности в указанном порядке, причём $AE=ED=CD$, а прямые AC и BE перпендикулярны. Отрезки AC и BD пересекаются в точке T.

а) Докажите, что прямая EC пересекает отрезок TD в его середине.

б) Найдите площадь треугольника ABT, если $BD=6$, $AE=\sqrt{6}$.

Решение.



а) Обозначим точку пересечения прямой EC и отрезка TD через M, а точку пересечения отрезков AC и BE через H. Угол BMC равен полусумме дуг BC и DE, а угол BHC равен полусумме дуг BC и AE. Дуги AE, ED и CD меньше $180°$ и стягиваются равными хордами. Следовательно, эти дуги равны. Значит,

$$\angle BMC=\angle BHC=90° \text{ и } \angle ACE=\angle DCE.$$

В треугольнике TCD отрезок CM является биссектрисой и высотой, поэтому этот треугольник равнобедренный, $TC=CD$, а точка M — середина отрезка TD.

б) Дуги AE и CD равны, значит, $\angle ACE=\angle CED$, следовательно, прямые AC и DE параллельны, а $\angle BED=90°$.

Обозначим $\angle DBE$ через α. Тогда $\sin\alpha=\frac{ED}{BD}=\frac{AE}{BD}=\frac{\sqrt{6}}{6}$; $\cos\alpha=\frac{\sqrt{30}}{6}$,

$$\angle ABE=\angle DBE=\angle DBC=\alpha;\ \angle EAC=\angle EBC=2\alpha.$$

В треугольнике ABT отрезок BH является биссектрисой и высотой, поэтому этот треугольник равнобедренный, $AB=BT$, а точка H — середина отрезка AT.

Получаем:

$$AH = AE\cdot\cos\angle EAC = AE\cdot\cos 2\alpha = AE\cdot\left(1-2\sin^2\alpha\right) = \frac{2\sqrt{6}}{3};$$

$$AT = 2AH = \frac{4\sqrt{6}}{3};\ BH = AH\cdot\operatorname{ctg}\angle ABH = AH\cdot\operatorname{ctg}\alpha = \frac{2\sqrt{30}}{3}.$$

Значит, площадь треугольника ABT равна

$$\frac{AT\cdot BH}{2} = \frac{8\sqrt{5}}{3}.$$

Ответ: б) $\frac{8\sqrt{5}}{3}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|x^2-a^2\right| = |x+a|\cdot\sqrt{x^2-4ax+5a}$$

имеет ровно один корень.

Решение.

Исходное уравнение равносильно уравнению:

$$|x+a|\cdot|x-a| = |x+a|\cdot\sqrt{x^2-4ax+5a};\ |x+a|\cdot\left(|x-a|-\sqrt{x^2-4ax+5a}\right)=0.$$

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $|x+a|=0$ при условии $x^2-4ax+5a\ge 0$. Получаем: $x=-a$. Условие принимает вид $5a^2+5a\ge 0$, откуда $a\le -1$; $a\ge 0$.

Второй случай: $|x-a|-\sqrt{x^2-4ax+5a}=0$. Получаем:

$$|x-a| = \sqrt{x^2-4ax+5a};\ x^2-2ax+a^2 = x^2-4ax+5a;\ 2ax = 5a-a^2,$$

откуда либо x — любое число при $a=0$, либо $x=\frac{5-a}{2}$ при $a\ne 0$.

Корни $x=-a$ и $x=\frac{5-a}{2}$ совпадают при $a=-5$.

Таким образом, исходное уравнение имеет единственный корень при $-1<a<0$ и a=-5

Ответ: $(-1; 0)$; -5.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только только исключением точки $a=-1$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек: $a=0$ и/или $a=-5$, возможно, с исключением точки $a=-1$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача сведена к исследованию корней двух уравнений: $x+a=0$ при условии $x^2-4ax+5a\geq 0$, $2ax=5a-a^2$ при всех значениях a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 На доске написаны три различных натуральных числа. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго.

а) Может ли сумма этих чисел быть равна 2022?
б) Может ли сумма этих чисел быть равна 2021?
в) В тройке чисел первое число трёхзначное, а третье равно 2. Сколько существует таких троек?

Решение.

а) Пусть на доске написаны числа 2009, 11 и 2. Тогда их сумма равна 2022.

б) Заметим, что сумма цифр числа имеет такой же остаток при делении на 3, как само число. Следовательно, все написанные на доске числа имеют одинаковый остаток при делении на 3, и их сумма делится на 3. Значит, эта сумма не может быть равна 2021.

в) Заметим, что сумма цифр любого трёхзначного числа не превосходит 27, а сумма цифр числа, не превосходящего 27, может быть равна 2 только для чисел 2, 11 и 20. Следовательно, второе число равно 11 или 20, а нам требуется найти количество трёхзначных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 11 или 20.

Найдём количество трёхзначных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 11. Если первая цифра числа равна 1, то таких чисел девять: 119, 128, 137, ..., 191. Если первая цифра числа равна 2, то таких чисел десять: 209, 218, 227, ..., 290. Если первая цифра числа равна 3, то таких чисел девять: 308, 317, 326, ..., 380. Рассуждая аналогично, получаем, что если первая цифра числа равна 4, 5, ..., 9, то таких чисел 8, 7, ..., 3 соответственно. Таким образом, количество трёхзначных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 11, равно

$$9+10+9+8+\ldots+3=61.$$

Найдём количество трёхзначных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 20. Если первая цифра числа равна 1, то таких чисел нет. Если первая цифра числа равна 2, то такое число одно: 299. Если первая цифра числа равна 3, то таких чисел два: 389, 398. Рассуждая аналогично, получаем, что если первая цифра числа равна 4, 5, ..., 9, то таких чисел 3, 4, ..., 8 соответственно. Таким образом, количество трёхзначных чисел, сумма цифр каждого из которых равна 20, равно

$$1+2+3 \ldots + 8 = 36.$$

Следовательно, искомое количество троек равно $61 + 36 = 97$.

Ответ: а) да; б) нет; в) 97.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Вариант 7

12 а) Решите уравнение $5\sin x - 4\sin^3 x = 2\sin 2x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

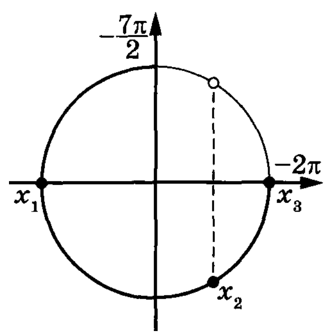
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$4\sin^3 x + 4\sin x\cos x - 5\sin x = 0;\ \sin x\cdot\left(4\sin^2 x + 4\cos x - 5\right) = 0;$$

$$\sin x\cdot\left(4\cos^2 x - 4\cos x + 1\right) = 0;\ \sin x\cdot(2\cos x - 1)^2 = 0;$$

Значит, $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Получим:

$x_1 = -\frac{7\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = -3\pi$;

$x_2 = -2\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{3}$;

$x_3 = -2\pi$.

Ответ: а) πk, $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) -3π; $-\frac{7\pi}{3}$; -2π.

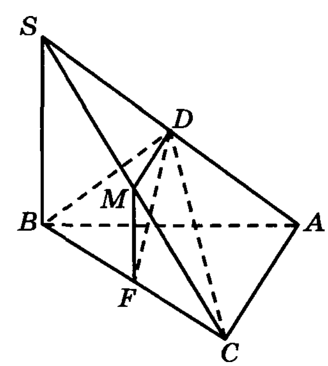
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

13 Основание пирамиды $SABC$ — прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Высота пирамиды проходит через точку B.

а) Докажите, что середина ребра SA равноудалена от вершин B и C.

б) Найдите угол между плоскостью SBC и прямой, проходящей через середины рёбер BC и SA, если известно, что $BS = AC$.

Решение.



а) Пусть D — середина ребра SA. По теореме о трёх перпендикулярах прямые SC и AC перпендикулярны. Медиана CD прямоугольного треугольника ACS равна половине гипотенузы AS. Медиана BD прямоугольного треугольника ASB также равна половине гипотенузы AS. Значит, $BD = CD$.

б) Пусть F — середина ребра BC, M — середина ребра SC, тогда FM — средняя линия треугольника CBS. Значит, $FM = \frac{1}{2}BS$, прямые FM и BS параллельны, то есть FM — перпендикуляр к плоскости основания пирамиды, поэтому отрезок FM перпендикулярен отрезку AC.

DM — средняя линия треугольника ASC, поэтому $DM = \frac{1}{2}AC$, а прямые DM и AC параллельны, значит отрезок DM перпендикулярен отрезкам FM и BC, следовательно DM — перпендикуляр к плоскости грани CBS.

Таким образом, угол DFM — это угол между прямой DF и плоскостью грани CBS.

По условию задачи $BS = AC$, поэтому $MF = DM$, значит,

$$\operatorname{tg}\angle DFM = \frac{DM}{FM} = 1.$$

Следовательно, $\angle DFM = 45°$.

Ответ: б) $45°$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\log_2^2(x^4) - 4\log_{0,25}(x^2) \geq 12$.

Решение.

$4\log_2^2(x^2) + 2\log_2(x^2) \geq 12$; $2\log_2^2(x^2) + \log_2(x^2) - 6 \geq 0$;

$(\log_2(x^2) + 2)\cdot(2\log_2(x^2) - 3) \geq 0$,

откуда $\log_2(x^2) \leq -2$ или $\log_2(x^2) \geq \frac{3}{2}$.

Значит, $x^2 \leq \frac{1}{4}$ или $x^2 \geq \sqrt{8}$,

откуда $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$ или $x \in \left(-\infty; -\sqrt[4]{8}\right] \cup \left[\sqrt[4]{8}; +\infty\right)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\sqrt[4]{8}\right]$; $[-0,5; 0)$; $(0; 0,5]$; $\left[\sqrt[4]{8}; +\infty\right)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек $-\sqrt[4]{8}$, $-0{,}5$, $0{,}5$ и/или $\sqrt[4]{8}$ ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q=2x^2+5x+10$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px-q$. При каком наименьшем значении p через 12 лет суммарная прибыль может составить не менее 744 млн рублей при некотором значении x?

Решение.

Прибыль (в млн рублей) за один год вычисляется как

$$px-(2x^2+5x+10)=-2x^2+(p-5)x-10$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x=\dfrac{p-5}{4}$.

Наибольшее значение равно $\dfrac{(p-5)^2}{8}-10$.

Значит, через 12 лет прибыль составит не менее 744 млн рублей при

$$12\cdot\left(\frac{(p-5)^2}{8}-10\right)\geq 744;$$

$$\frac{(p-5)^2}{8}-10\geq 62;\ \ (p-5)^2\geq 576;\ \ (p+19)(p-29)\geq 0.$$

то есть при $p\geq 29$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшее значение $p=29$.

Ответ: 29.

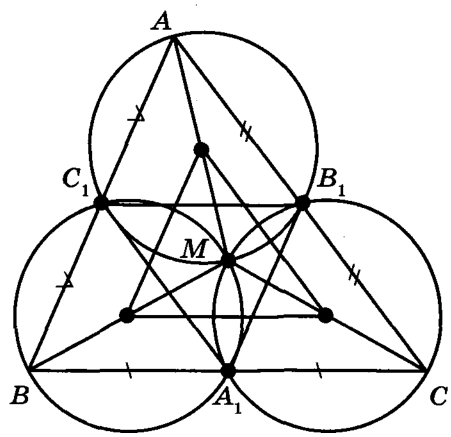
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Точки A_1, B_1, C_1 — середины сторон соответственно BC, AC и AB остроугольного треугольника ABC.

а) Докажите, что окружности, описанные около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1, пересекаются в одной точке.

б) Известно, что $AB = AC = 13$ и $BC = 10$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник, вершины которого — центры окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1, A_1BC_1 и B_1AC_1.

Решение.



а) Пусть α, β, γ — углы при вершинах A, B и C треугольника ABC соответственно, M — отличная от A_1 точка пересечения окружностей, описанных около треугольников A_1CB_1 и A_1BC_1.

Четырёхугольник A_1BC_1M вписан в окружность, поэтому

$\angle A_1MC_1 = 180° - \angle A_1BC_1 = 180° - \beta$.

Аналогично $\angle A_1MB_1 = 180° - \gamma$. Значит,

$$\angle B_1MC_1 = 360° - (\angle A_1MC_1 + \angle A_1MB_1) = 360° - (180° - \beta + 180° - \gamma) = \beta + \gamma = 180° - \alpha,$$

поэтому четырёхугольник B_1AC_1M — вписанный. Следовательно, точка M лежит на описанной окружности треугольника B_1AC_1.

б) Отрезок AM — диаметр окружности, описанной около равнобедренного треугольника B_1AC_1, поэтому отрезок MB_1 перпендикулярен отрезку AC. Значит, CM — диаметр окружности, описанной около треугольника A_1CB_1. Аналогично BM — диаметр окружности, описанной около треугольника A_1BC_1. Центры этих трёх окружностей — середины отрезков AM, BM и CM. По теореме о средней линии треугольника стороны треугольника с вершинами в центрах трёх указанных окружностей соответственно параллельны сторонам треугольника ABC. Значит, треугольник с вершинами в центрах этих окружностей подобен треугольнику ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Пусть r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда

$$r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB + AC + BC} = \frac{BC \cdot AA_1}{13 + 13 + 10} = \frac{10 \cdot 12}{36} = \frac{10}{3}.$$

Следовательно, искомый радиус равен $\frac{r}{2} = \frac{5}{3}$.

Ответ: $\frac{5}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2

Окончание табл.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(x-2a+2)^2+(y+a-2)^2=a+\dfrac{5}{2},\\ x+y=1-a\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Выразим из второго уравнения $y=1-a-x$ и подставим в первое:

$$x^2-2(2a-2)x+(2a-2)^2+(-x-a+1+a-2)^2=a+\frac{5}{2},$$

$$x^2-4ax+4x+4a^2-8a+4+x^2+2x+1=a+\frac{5}{2},$$

$$2x^2-2x(2a-3)+4a^2-9a+\frac{5}{2}=0.$$

Поскольку y однозначно выражается через x, каждому корню этого уравнения будет соответствовать единственное решение исходной системы. Значит, система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда дискриминант равен нулю:

$$\frac{D}{4}=(2a-3)^2-2\left(4a^2-9a+\frac{5}{2}\right)=-4a^2+6a+4=-2\left(2a^2-3a-2\right)=0.$$

Получаем, что $a=-\dfrac{1}{2}$ или $a=2$.

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$; 2.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены оба верных значения параметра, но решение недостаточно обосновано	3

Окончание табл.

Содержание критерия	Баллы
При верном ходе рассуждений решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу	2
Задача сведена к исследованию квадратного уравнения с параметром	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 Для действительного числа x обозначим через $[x]$ наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $\left[\frac{11}{4}\right]=2$, так как $2\le\frac{11}{4}<3$.

а) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{7}\right]=n$?

б) Существует ли такое натуральное число n, что $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]=n+2$?

в) Сколько существует различных натуральных n, для которых

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{17}\right]=n+1945?$$

Решение.

а) Нет. Действительно, $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{7}\right]\le\frac{n}{2}+\frac{n}{4}+\frac{n}{7}=\frac{25}{28}n<n$.

б) Да. При $n=24$ имеем $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]=12+8+6=26=n+2$.

в) Пусть натуральное число n при делении с остатком на 2, 3, 9 и 17 даёт в остатке p, q, r и s соответственно. Тогда

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{17}\right]=\frac{n-p}{2}+\frac{n-q}{3}+\frac{n-r}{9}+\frac{n-s}{17}=\frac{307n-153p-102q-34r-18s}{306}.$$

Следовательно, равенство $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{17}\right]=n+1945$ имеет место тогда и только тогда, когда $\frac{307n-153p-102q-34r-18s}{306}=n+1945$, или, что то же самое, когда $n=153p+102q+34r+18s+306\cdot1945$.

Остаток p может принимать целые значения 0 или 1, остаток r — от 0 до 8 включительно, остаток s — от 0 до 16 включительно, а остаток q однозначно определяется значением остатка r ($q=0$ при $r=0$, или 3, или 6, $q=1$ при $r=1$, или 4, или 7, $q=2$ при $r=2$, или 5, или 8). Отсюда получаем, что выражение $153p+102q+34r+18s+306\cdot1945$ может принимать не более $2\cdot9\cdot17=306$ различных натуральных значений.

Покажем, что все такие 306 чисел $n=153p+102q+34r+18s+306\cdot1945$, получаемые при подстановке всех допустимых значений p, q, r и s, имеют при делении с остатком на 2, 3, 9 и 17 остатки p, q, r и s соответственно. Действительно, имеем $n = 9 \cdot (17p + 11q + 3r + 2s + 34 \cdot 1945) + 3(q + 2r) + r$, причём $q + 2r$ всегда делится на 3. Значит, такое число n при делении с остатком на 3 и 9 даёт в остатке q и r соответственно. Аналогично имеем $n = 2 \cdot (76p + 51q + 17r + 9s + 153 \cdot 1945) + p$. Следовательно, такое число при делении с остатком на 2 даёт в остатке p. Наконец, имеем $n = 17 \cdot (9p + 6q + 2r + s + 18 \cdot 1945) + s$. Значит, такое число n при делении с остатком на 17 даёт в остатке s.

Все такие 306 чисел попарно различны, так как при делении с остатком на числа 2, 3, 9 и 17 дают попарно разные наборы остатков. Следовательно, искомых чисел n ровно 306.

Ответ: а) нет; б) да; в) 306.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Вариант 11

12 а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

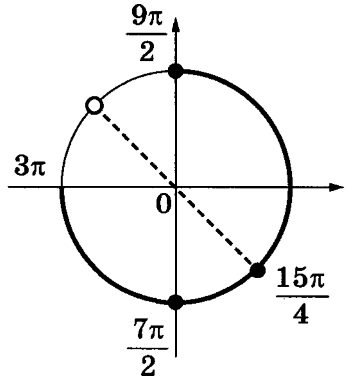
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 0;\ \cos x \cdot (\sin x + \cos x) = 0.$$

Значит, или $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\cos x$; $\operatorname{tg} x = -1$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{15\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{7\pi}{2}$; $\frac{15\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{2}$.

<u>*Замечание*</u>. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решением линейных неравенств и т. п.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

13 В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ сторона основания AB равна 2, а боковое ребро SA равно 8. Точка M — середина ребра AB. Плоскость α перпендикулярна плоскости ABC и содержит точки M и D. Прямая SC пересекает плоскость α в точке K.

а) Докажите, что $KM = KD$.

б) Найдите объём пирамиды $CDKM$.

Решение.

а) Пусть прямые CF и MD пересекаются в точке H (рис. 1), а SO — высота пирамиды $SABCDEF$. Поскольку пирамида $SABCDEF$ правильная, центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ совпадает с точкой O. Значит, прямая SO лежит в плоскости SCF. Следовательно, плоскость SCF перпендикулярна плоскости ABC.

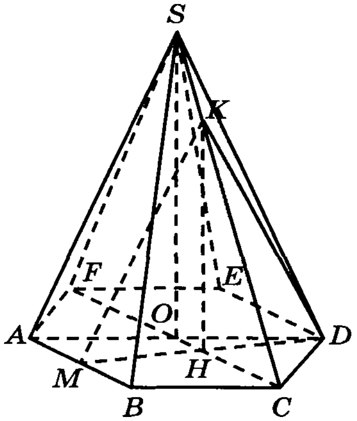


Рис. 1

Получаем, что прямая KH, являющаяся прямой пересечения плоскостей SCF и α, перпендикулярна плоскости ABC. Значит, отрезок KH является высотой в треугольнике MKD.

Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 2). Прямые AB и CF параллельны, а точка O — середина отрезка AD, следовательно, отрезок OH — средняя линия треугольника ADM и $MH = HD$. Таким образом, отрезок KH является медианой и высотой в треугольнике MKD, значит, этот треугольник равнобедренный и $KM = KD$.

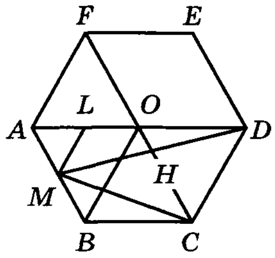


Рис. 2

б) В пункте *а* было доказано, что прямая KH перпендикулярна плоскости ABC, следовательно, отрезок KH является высотой пирамиды $CDKM$.

Поскольку отрезок OH является средней линией треугольника ADM,

$$OH = \frac{AM}{2} = \frac{AB}{4} = 0{,}5; \; CH = OC - OH = AB - OH = 1{,}5.$$

В треугольнике SOC имеем:

$$SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{64-4}=2\sqrt{15};\ KH=\frac{CH}{OC}\cdot SO=\frac{1{,}5\cdot 2\sqrt{15}}{2}=\frac{3\sqrt{15}}{2}.$$

Пусть точка L — середина отрезка OA. Тогда средняя линия LM треугольника AOB параллельна прямой OB, а значит, и прямой CD. Следовательно, расстояние от точки M до прямой CD равно расстоянию от точки L до прямой CD и равно $\frac{3}{4}$ расстояния h между прямыми AF и CD.

Площадь треугольника CDM равна

$$S_{CDM}=\frac{CD\cdot\frac{3}{4}h}{2}=\frac{3}{8}\cdot AB\cdot AB\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Объём пирамиды $CDKM$ равен

$$\frac{1}{3}\cdot KH\cdot S_{CDM}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{15}}{2}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{5}}{4}.$$

Ответ: $\frac{9\sqrt{5}}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $x^2\log_{64}(3-2x)\geq\log_2\left(4x^2-12x+9\right)$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\frac{x^2}{6}\cdot\log_2(3-2x)\geq 2\log_2(3-2x);\ \left(x^2-12\right)\log_2(3-2x)\geq 0.$$

Заметим, что выражение $\log_2(3-2x)$ определено при $x<1{,}5$, принимает отрицательные значения при $1<x<1{,}5$, равно 0 при $x=1$ и принимает положительные значения при $x<1$.

При $1<x<1{,}5$ значение выражения x^2-12 отрицательно, а значит, любое значение x из этого интервала удовлетворяет неравенству $(x^2-12)\log_2(3-2x)\geq 0$.

При $x<1$ неравенство принимает вид $x^2-12\geq 0$, откуда $x\leq -2\sqrt{3}$; $x\geq 2\sqrt{3}$. Учитывая ограничение $x<1{,}5$, получаем $x\leq -2\sqrt{3}$.

Таким образом, решение исходного неравенства: $x\leq -2\sqrt{3}$; $1\leq x<1{,}5$.

Ответ: $(-\infty;\ -2\sqrt{3}]$; $[1;\ 1{,}5)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек $-2\sqrt{3}$ и/или 1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 В июле 2022 года планируется взять кредит на пять лет в размере 1050 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2023, 2024 и 2025 годов долг остаётся равным 1050 тыс. рублей;
- выплаты в 2026 и 2027 годах равны;
- к июлю 2027 года долг будет выплачен полностью.

На сколько рублей последняя выплата будет больше первой?

Решение.

Пусть выплаты с февраля по июнь в 2026 и 2027 годах составляют по x тыс. рублей. В июле 2023, 2024 и 2025 годов долг перед банком не меняется, а ежегодные выплаты составляют по 105 тыс. рублей.

В январе 2026 года долг (в тыс. рублей) равен 1155, а в июле — $1155-x$. В январе 2027 года долг равен $1270{,}5-1{,}1x$, а в июле — $1270{,}5-2{,}1x$. По условию, к июлю 2027 года долг будет выплачен полностью, значит, $1270{,}5-2{,}1x=0$, откуда $x=605$.

Таким образом, первая выплата составляет 105 тыс. рублей, а последняя — 605 тыс. рублей. Последняя выплата больше первой на 500 тыс. рублей.

Ответ: 500 тыс. рублей.

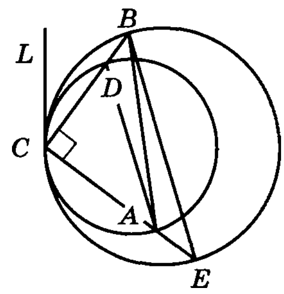
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Две окружности касаются внутренним образом в точке C. Вершины A и B равнобедренного прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C лежат на меньшей и большей окружностях соответственно. Прямая AC вторично пересекает бо́льшую окружность в точке E, а прямая BC вторично пересекает меньшую окружность в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и BE параллельны.

б) Найдите AC, если радиусы окружностей равны 3 и 4.

Решение.



а) Пусть CL — общая касательная двух окружностей, причём точки L и B лежат по одну сторону от прямой AC. Тогда по теореме об угле между касательной и хордой

$$\angle CAD = \angle LCB = \angle CEB.$$

Значит, прямые AD и BE параллельны, поскольку соответственные углы CAD и CEB при пересечении этих прямых прямой AE равны.

б) Поскольку угол ACB прямой, AD и BE — диаметры меньшей и большей окружностей соответственно.

Прямоугольные треугольники ACD и ECB подобны по острому углу ($\angle CAD = \angle CEB$) с коэффициентом подобия $\frac{AD}{BE} = \frac{3}{4}$.

Пусть $AC = BC = x$, тогда $CD = \frac{3}{4}BC = \frac{3x}{4}$.

В прямоугольном треугольнике ACD:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2;\ 36 = x^2 + \frac{9x^2}{16},$$

откуда $x = \frac{24}{5}$.

Ответ: 4,8.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{16-y^2}=\sqrt{16-a^2x^2},\\ x^2+y^2=8x+4y\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Заметим, что при $|y|>4$ левая часть первого уравнения системы не определена, а при $-4\le y\le 4$ первое уравнение системы принимает вид:

$$16-y^2=16-a^2x^2;\ y^2=a^2x^2,$$

откуда $y=ax$ или $y=-ax$.

При $y=ax$ второе уравнение системы принимает вид:

$$x^2+a^2x^2=8x+4ax;\ \left(a^2+1\right)x^2=(4a+8)x,$$

откуда $x=0$ или $x=\dfrac{4a+8}{a^2+1}$. В этих случаях получаем $y=0$ и $y=\dfrac{4a^2+8a}{a^2+1}$ соответственно.

При $y=-ax$ второе уравнение системы принимает вид:

$$x^2+a^2x^2=8x-4ax;\ \left(a^2+1\right)x^2=(8-4a)x,$$

откуда $x=0$ или $x=\dfrac{8-4a}{a^2+1}$. В этих случаях получаем $y=0$ и $y=\dfrac{4a^2-8a}{a^2+1}$ соответственно.

Таким образом, решениями исходной системы являются пары чисел $(0;0)$, $\left(\dfrac{4a+8}{a^2+1};\dfrac{4a^2+8a}{a^2+1}\right)$, $\left(\dfrac{8-4a}{a^2+1};\dfrac{4a^2-8a}{a^2+1}\right)$, для которых выполнено условие $-4\le y\le 4$.

Для пары $(0;0)$ условие $-4\le y\le 4$ выполнено.

Для пары $\left(\frac{4a+8}{a^2+1};\frac{4a^2+8a}{a^2+1}\right)$ условие $-4\le y\le 4$ принимает вид:

$$-4\le\frac{4a^2+8a}{a^2+1}\le 4;\ -a^2-1\le a^2+2a\le a^2+1;\ \begin{cases}2a^2+2a+1\ge 0,\\2a-1\le 0,\end{cases}$$

откуда $a\le\frac{1}{2}$, поскольку решением неравенства $2a^2+2a+1\ge 0$ является любое число.

Для пары $\left(\frac{8-4a}{a^2+1};\frac{4a^2-8a}{a^2+1}\right)$ условие $-4\le y\le 4$ принимает вид:

$$-4\le\frac{4a^2-8a}{a^2+1}\le 4;\ -a^2-1\le a^2-2a\le a^2+1;\ \begin{cases}2a^2-2a+1\ge 0,\\2a+1\ge 0,\end{cases}$$

откуда $a\ge-\frac{1}{2}$, поскольку решением неравенства $2a^2-2a+1\ge 0$ является любое число.

Пары $(0;0)$ и $\left(\frac{4a+8}{a^2+1};\frac{4a^2+8a}{a^2+1}\right)$ совпадают при $a=-2$.

Пары $(0;0)$ и $\left(\frac{8-4a}{a^2+1};\frac{4a^2-8a}{a^2+1}\right)$ совпадают при $a=2$.

Пары $\left(\frac{4a+8}{a^2+1};\frac{4a^2+8a}{a^2+1}\right)$ и $\left(\frac{8-4a}{a^2+1};\frac{4a^2-8a}{a^2+1}\right)$ совпадают при $a=0$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно два различных решения при $a<-2$; $-2<a<-\frac{1}{2}$; $a=0$; $\frac{1}{2}<a<2$; $a>2$.

Ответ: $a<-2$; $-2<a<-\frac{1}{2}$; $a=0$; $\frac{1}{2}<a<2$; $a>2$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением не более двух из пяти точек: $a=-2$, $a=-\frac{1}{2}$, $a=0$, $a=\frac{1}{2}$, $a=2$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением более двух из пяти точек: $a=-2$, $a=-\frac{1}{2}$, $a=0$, $a=\frac{1}{2}$, $a=2$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения окружности и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 На доске было написано несколько различных натуральных чисел. Эти числа разбили на три группы, в каждой из которых оказалось хотя бы одно число. К каждому числу из первой группы приписали справа цифру 3, к каждому числу из второй группы — цифру 7, а числа из третьей группы оставили без изменений.

а) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 8 раз?

б) Могла ли сумма всех этих чисел увеличиться в 17 раз?

в) В какое наибольшее число раз могла увеличиться сумма всех этих чисел?

Решение.

а) Пусть на доске были написаны числа 1, 8 и 4, из которых получили числа 13, 87 и 4. При этом $1+8+4=13$, $13+87+4=104=8\cdot 13$. Значит, сумма увеличилась в 8 раз.

б) Пусть в первой группе было m чисел, а их сумма равнялась A, во второй группе было n чисел, а их сумма равнялась B, а сумма чисел в третьей группе равнялась C. Тогда сумма чисел была равна $A+B+C$, а стала $10A+3m+10B+7n+C$.

Предположим, что сумма увеличилась в 17 раз. Тогда получаем:

$$10A+3m+10B+7n+C=17A+17B+17C;\ 3m+7n=7A+7B+16C.$$

Это невозможно, поскольку $A\geq m\geq 1$, $B\geq n\geq 1$, $C\geq 1$.

в) Рассмотрим отношение Q получившейся суммы чисел и изначальной:

$$Q=\frac{10A+3m+10B+7n+C}{A+B+C}=10+\frac{3m+7n-9C}{A+B+C}.$$

Если перенести одно число из первой или третьей группы во вторую, то $A+B+C$ не изменится, а $3m+7n-9C$ увеличится. Значит, отношение Q будет наибольшим, если в первой и третьей группах находится по одному числу. Поэтому будем считать, что $m=1$, а общее количество чисел равно $n+2$. Поскольку числа различные, получаем $A+B+C\geq\frac{(n+2)(n+3)}{2}$. Кроме того, $C\geq 1$. Значит,

$$Q=10+\frac{3+7n-9C}{A+B+C}\leq 10+\frac{7n-6}{A+B+C}\leq 10+\frac{2(7n-6)}{(n+2)(n+3)}.$$

Найдём, при каком значении n выражение $f(n)=\frac{7n-6}{(n+2)(n+3)}$ принимает наибольшее значение. Рассмотрим разность

$$f(n+1)-f(n)=\frac{7n+1}{(n+3)(n+4)}-\frac{7n-6}{(n+2)(n+3)}=$$

$$=\frac{(n+2)(7n+1)-(n+4)(7n-6)}{(n+2)(n+3)(n+4)}=\frac{26-7n}{(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Значит, $f(n+1)-f(n)>0$ при $n\leq 3$ и $f(n+1)-f(n)<0$ при $n\geq 4$. Таким образом, $f(n)$ принимает наибольшее значение при $n=4$. Следовательно,

$$Q\leq 10+\frac{2(7n-6)}{(n+2)(n+3)}\leq 10+2f(4)=10+\frac{22}{21}=\frac{232}{21}.$$

Покажем, что отношение Q могло равняться $\frac{232}{21}$. Пусть было написано шесть чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, из которых получили числа 1, 23, 37, 47, 57, 67. Тогда сумма чисел была равна 21, а стала 232. Таким образом, $Q=\frac{232}{21}$.

Ответ: а) да; б) нет; в) $\frac{232}{21}$.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Вариант 17

12 а) Решите уравнение $\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos 2x=\frac{\sin^2 x}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) $\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos 2x=2\sin^2 x$; $\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=1$.

Возможны два случая:

$$\begin{cases}\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=1,\\ \cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=1\end{cases} \quad\text{или}\quad \begin{cases}\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-1,\\ \cos\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)=-1.\end{cases}$$

В первом случае:

$$\begin{cases}2x+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ 4x+\frac{\pi}{3}=2\pi n;\end{cases} \begin{cases}2x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\\ 4x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\end{cases} \begin{cases}x=-\frac{\pi}{12}+\pi k,\\ x=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}n\end{cases}, \text{ где } k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Получаем: $x=-\frac{\pi}{12}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

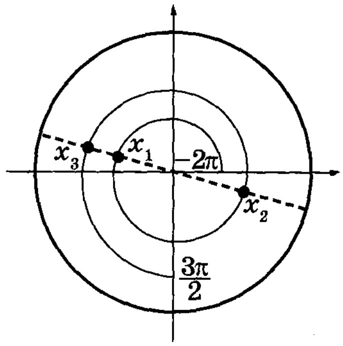
Во втором случае:

$$\begin{cases} 2x+\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ 4x+\dfrac{\pi}{3}=\pi+2\pi n; \end{cases} \begin{cases} 2x=-\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k, \\ 4x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n; \end{cases} \begin{cases} x=-\dfrac{7\pi}{12}+\pi k, \\ x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}n \end{cases}, \text{ где } k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Система решений не имеет.

Получили, что $x=-\dfrac{\pi}{12}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности найдём корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right]$.



$$x_1=-2\pi+\pi-\frac{\pi}{12}=-\frac{13\pi}{12};$$

$$x_2=-2\pi+2\pi-\frac{\pi}{12}=-\frac{\pi}{12};$$

$$x_1=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}=\frac{11\pi}{12}.$$

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{12}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

б) $-\dfrac{13\pi}{12}$; $-\dfrac{\pi}{12}$; $\dfrac{11\pi}{12}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решением линейных неравенств и т. п.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

13 В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро AA_1 равно 3. На рёбрах A_1D_1 и DD_1 отмечены соответственно точки K и M так, что $A_1K=KD_1$, а $DM:MD_1=2:1$.

а) Докажите, что прямые MK и BK перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMK и BCC_1.

Решение.

а) Из прямоугольных треугольников KMD_1, BKB_1 и BMD соответственно получаем, что $KM=2$, $BK=2\sqrt{6}$ и $BM=2\sqrt{7}$. Заметим, что $KM^2+BK^2=BM^2$. Значит, треугольник BKM прямоугольный, а прямые MK и BK перпендикулярны.

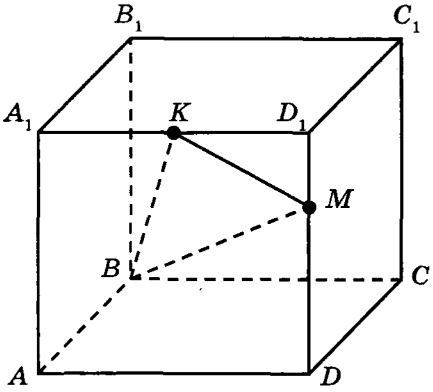


Рис. 1

б) Угол между плоскостями BMK и BCC_1 равен углу между плоскостями BMK и ADD_1.

Плоскости BMK и ADD_1 пересекаются по прямой KM, причём прямые MK и BK перпендикулярны (см. пункт а). Построим прямую KZ в плоскости ADD_1, перпендикулярную прямой KM (рис. 2). Треугольники KMD_1 и ZKA подобны по двум углам.

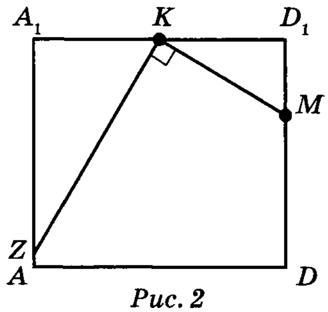


Рис. 2

Значит, $\frac{A_1Z}{A_1K}=\frac{KD_1}{MD_1}$. Откуда $A_1Z=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{1}=3$.

Следовательно, точки A и Z совпадают, а AK перпендикулярно KM.

Получили, что угол AKB — линейный угол двугранного угла между плоскостями BMK и ADD_1.

Из прямоугольного треугольника ABK получаем, что $tg\angle AKB=\frac{AB}{AK}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1$, а значит, угол между плоскостями BMK и BCC_1 равен 45°.

Ответ: 45°.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\frac{6\cdot 5^x-11}{25^{x+0,5}-6\cdot 5^x+1}\ge 0{,}25$.

Решение.

Пусть $t=5^x$, тогда неравенство примет вид: $\frac{6t-11}{5t^2-6t+1}-\frac{1}{4}\ge 0$.

$$\frac{24t-44-5t^2+6t-1}{4(5t^2-6t+1)}\ge 0;\ \frac{t^2-6t+9}{5t^2-6t+1}\le 0;\ \frac{(t-3)^2}{(t-1)(5t-1)}\le 0,$$

значит $t\in\left(\frac{1}{5};5\right)$ или $t=3$.

Получаем: $\frac{1}{5}<5^x<1$, откуда $x\in(-1;0)$, или $5^x=3$, откуда $x=\log_5 3$.

Ответ: $(-1;0)$; $\log_5 3$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\log_5 3$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 Александр хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года у Александра не было денег на покупку акций, а пакет стоил 100 000 рублей. В середине каждого месяца Александр откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму, а в конце месяца пакет дорожает, но не более чем на 30 %. Какую наименьшую сумму нужно откладывать Александру каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

Решение.

Пусть Александр откладывает в середине каждого месяца x рублей. К середине n-го месяца у Александра скопится nx рублей, а акции будут стоить не более $100\,000\cdot 1{,}3^{n-1}$ рублей. Для того чтобы Александр смог купить пакет акций в этом месяце, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $x\ge\frac{100\,000\cdot 1{,}3^{n-1}}{n}$. Положим $a_n=\frac{100\,000\cdot 1{,}3^{n-1}}{n}$. Для того чтобы Александр смог через некоторое время купить пакет акций, необходимо и достаточно откладывать сумму большую либо равную наименьшему из чисел a_n. Сравним два последовательных таких числа.

Для этого вычислим их отношение: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1{,}3\cdot n}{n+1}=\frac{13n}{10n+10}$. Отсюда получаем, что при $n<4$ выполнено $a_{n+1}\le a_n$, а при $n\ge 4$ выполнено $a_{n+1}\ge a_n$.

Значит, наименьшим из чисел a_n будет число $a_4=\frac{100\,000\cdot 1{,}3^3}{4}=54\,925$.

Поэтому наименьшая сумма, которую нужно откладывать Александру, равна 54 925 рублей.

Ответ: 54 925 рублей.

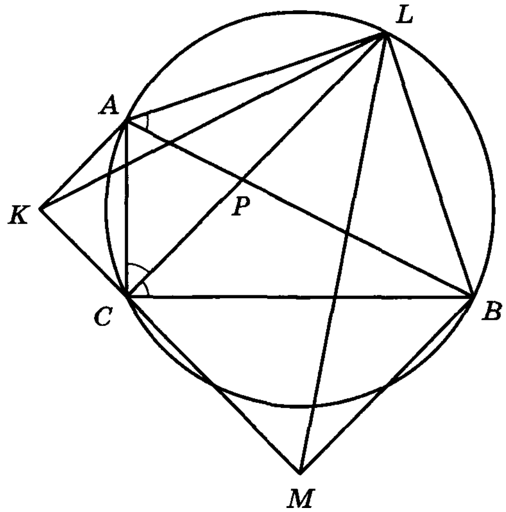
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 На сторонах AC, AB и BC прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вне треугольника ABC построены равнобедренные прямоугольные треугольники AKC, ALB и BMC с прямыми углами K, L и M соответственно.

а) Докажите, что LC — высота треугольника KLM.

б) Найдите площадь треугольника KLM, если $LC=4$.

Решение.



а) По условию $\angle ACB+\angle BLA=90°+90°=180°$. Значит, четырёхугольник $LACB$ вписанный.

Хорды AL и LB описанной около четырёхугольника $LACB$ окружности равны. Значит, равны между собой стягиваемые этими хордами дуги, а также опирающиеся на эти дуги вписанные углы ACL и LCB. Тогда $\angle ACL=\angle LCB=45°$.

По условию $\angle KCA=\angle MCB=45°$. Следовательно, $\angle KCL=\angle KCA+\angle ACL=90°$ и $\angle MCL=\angle MCB+\angle LCB=90°$, а значит, LC — высота треугольника KLM.

б) Пусть $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ и $CL=d$, P — точка пересечения CL и AB. Тогда по доказанному в пункте а) CP — биссектриса треугольника ABC. По свойству биссектрисы $AP:PB=AC:CB=b:a$, $AP+PB=AB=c$. Отсюда $AP=\frac{bc}{a+b}$ и $PB=\frac{ac}{a+b}$.

Поскольку $\angle ACL=\angle BAL=45°$, получаем, что треугольники ACL и PAL подобны по двум углам. Отсюда $\frac{AC}{PA}=\frac{CL}{AL}$, $b:\frac{bc}{a+b}=d:\frac{c}{\sqrt{2}}$ и $d=\frac{a+b}{\sqrt{2}}$.

Площадь треугольника KLM равна половине произведения его высоты $LC = d$ на основание $KM = KC + CM = \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} = d$. Следовательно, искомая площадь равна $\frac{d^2}{2} = 8$.

Ответ: 8.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите, при каких неотрицательных значениях a функция $f(x) = 3ax^4 - 8x^3 + 3x^2 - 7$ на отрезке $[-1; 1]$ имеет ровно одну точку минимума.

Решение.

Найдём производную функции: $f'(x) = 12ax^3 - 24x^2 + 6x$.

$$12ax^3 - 24x^2 + 6x = 0;\ 6x(2ax^2 - 4x + 1) = 0.$$

В точке $x = 0$ производная меняет знак с «$-$» на «$+$», поэтому точка $x = 0$ является точкой минимума.

Функция $f(x) = 3ax^4 - 8x^3 + 3x^2 - 7$ может иметь ещё точку минимума, если уравнение $2ax^2 - 4x + 1 = 0$ имеет два корня, а значит, при $a < 2$.

а) При $a = 0$ уравнение имеет два корня: $x = 0$ и $x = \frac{1}{4}$.

Точка $x = \frac{1}{4}$ является точкой максимума.

б) При $a \in (0; 2)$ уравнение имеет три различных корня:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2 - \sqrt{4 - 2a}}{2a} \text{ и } x_3 = \frac{2 + \sqrt{4 - 2a}}{2a}, \text{ где } x_1 < x_2 < x_3;$$

точка x_2 является точкой максимума, а точки x_1 и x_3 — точками минимума. Точка x_3 лежит на отрезке $[-1;\ 1]$, если $\frac{2+\sqrt{4-2a}}{2a} \leq 1$, а это выполнено при всех $a \geq 1{,}5$.

Получили: функция $f(x) = 3ax^4 - 8x^3 + 3x^2 - 7$ на отрезке $[-1;\ 1]$ имеет одну точку минимума при $a \in [0; 1{,}5)$ и $a \geq 2$.

Ответ: $[0; 1{,}5)$; $[2; +\infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением/исключением точек $a = 1{,}5$ и/или $a = 2$	3
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точки $a = 0$, а также, может быть, включением/исключением точек $a = 1{,}5$ и/или $a = 2$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно найдены все три граничные точки множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 Для каждого натурального числа n обозначим через $n!$ произведение первых n натуральных чисел ($1! = 1$).

а) Существует ли такое натуральное число n, что десятичная запись числа $n!$ оканчивается ровно 9 нулями?

б) Существует ли такое натуральное число n, что десятичная запись числа $n!$ оканчивается ровно 23 нулями?

в) Сколько существует натуральных чисел n, меньших 100, для каждого из которых десятичная запись числа $n! \cdot (100 - n)!$ оканчивается ровно 23 нулями?

Решение.

а) Для $n = 40$ получаем $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 40 = p \cdot q$, где число p — это произведение всех кратных 5 натуральных чисел от 1 до 40, а q — это произведение всех не кратных 5 натуральных чисел от 1 до 40. Тогда число $p = 5 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 40 = 5^9 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8)$ делится на 5^9, но не делится на 5^{10}, а число q делится на $16 \cdot 32 = 2^9$, но не делится на 5. Значит, число $n!$ делится на 10^9, но не делится на 10^{10}, и, следовательно, его десятичная запись оканчивается ровно 9 нулями.

б) Для $n = 99$ получаем $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 99 = p \cdot q$, где число p — это произведение всех кратных 5 натуральных чисел от 1 до 99, а q — это произведение всех не кратных 5 натуральных чисел от 1 до 99.

Тогда число $p=5\cdot10\cdot\ldots\cdot95=5^{19}\cdot(1\cdot2\cdot\ldots\cdot19)=5^{22}\cdot r$, где число r не делится на 5. Следовательно, число p делится на 5^{22}, но не делится на 5^{23}. При этом число q делится на $4\cdot16\cdot32\cdot64\cdot96=2^{22}\cdot3$, но не делится на 5. Значит, число $n!$ делится на 10^{22}, но не делится на 10^{23}, и, следовательно, его десятичная запись оканчивается ровно 22 нулями. Поэтому десятичная запись числа $n!$ при $n\le99$ не может оканчиваться ровно 23 нулями, а при $n\ge100$ число делится на $100!=99!\cdot100$ и, следовательно, десятичная запись числа $n!$ оканчивается более чем 23 нулями. Следовательно, таких чисел не бывает.

в) Для каждого действительного числа x обозначим через $[x]$ наибольшее целое число, не превосходящее x. Тогда для любого натурального числа m и любого простого числа p среди чисел 1, 2, ..., m найдётся ровно $\left[\frac{m}{p}\right]$ чисел, кратных p, и $\left[\frac{m}{p^2}\right]$ чисел, кратных p^2.

Поскольку при $1\le m<100$ ни одно из чисел 1, 2, ..., m не кратно $125=5^3$, то получаем, что число $m!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot m$ делится на $5^{\left[\frac{m}{5}\right]+\left[\frac{m}{5^2}\right]}$ и на $2^{\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{m}{2^2}\right]}$, но не делится на $5^{\left[\frac{m}{5}\right]+\left[\frac{m}{5^2}\right]+1}$.

Для любого натурального числа n, меньшего 100, получаем: $1\le100-n<100$, $\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]\le\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{2^2}\right]$ и $\left[\frac{100-n}{5}\right]+\left[\frac{100-n}{5^2}\right]\le\left[\frac{100-n}{2}\right]+\left[\frac{100-n}{2^2}\right]$.

Значит, для каждого такого n десятичная запись числа $n!\cdot(100-n)!$ оканчивается ровно $k=\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[\frac{100-n}{5}\right]+\left[\frac{100-n}{5^2}\right]$ нулями.

Число $\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{100-n}{5}\right]=\left[\frac{n}{5}\right]+\left[20-\frac{n}{5}\right]$ равно 20 при n, кратных 5, и равно 19 при n, не кратных 5.

Число $\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[\frac{100-n}{5^2}\right]=\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[4-\frac{n}{5^2}\right]$ равно 4 при n, кратных 25, и равно 3 при n, не кратных 25.

Значит, для числа $k=\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{100-n}{5}\right]+\left[\frac{n}{5^2}\right]+\left[\frac{100-n}{5^2}\right]$ получили:

$k=24$ при n, кратных 25,
$k=23$ при n, кратных 5, но не кратных 25,
$k=22$ при n, не кратных 5.

Следовательно, натуральное число n, меньшее 100, будет искомым тогда и только тогда, когда оно кратно 5, но не кратно 25.

Значит, существует ровно 16 искомых натуральных чисел.

Ответ: а) да; б) нет; в) 16.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Вариант 21

12 а) Решите уравнение $\cos 2x-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;\ -\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

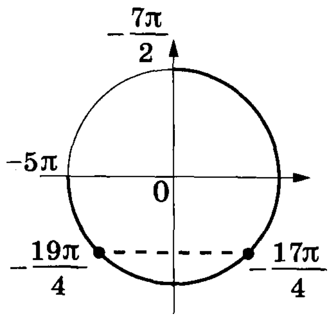
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$1-2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x+1=0;\ \left(2\sin x+\sqrt{2}\right)\left(\sin x-\sqrt{2}\right)=0.$$

Значит, $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

Уравнение $\sin x=\sqrt{2}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi;-\frac{7\pi}{2}\right]$.



Получим числа $-\frac{19\pi}{4}$, $-\frac{17\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{19\pi}{4}$, $-\frac{17\pi}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

13 В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём $AK : KB = SM : MC = 1 : 5$. Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC.

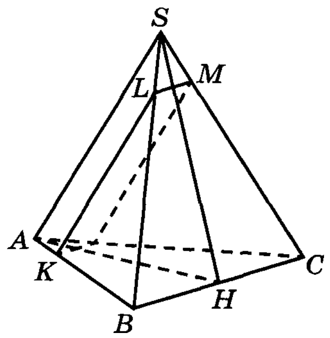
а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

Решение.

а) Пусть плоскость α пересекает ребро SB в точке L. Поскольку прямая BC параллельна плоскости α, прямые LM и BC параллельны, а значит,

$$SL : LB = SM : MC = AK : KB.$$



Следовательно, прямые KL и SA параллельны. Таким образом, плоскость α, содержащая прямую KL, параллельна прямой SA.

б) Пусть точка H — середина ребра BC. Тогда медианы AH и SH треугольников ABC и SBC соответственно являются их высотами, а значит, плоскость ASH перпендикулярна прямой BC.

Следовательно, плоскость ASH перпендикулярна плоскости α, параллельной прямой BC, и плоскости SBC, содержащей прямую BC.

Поскольку плоскость α параллельна прямой SA, лежащей в плоскости ASH, искомый угол равен углу между прямой SA и плоскостью SBC.

Таким образом, угол между плоскостями α и SBC равен углу ASH.

В треугольнике ASH имеем:

$$AS = 7,\ AH = 3\sqrt{3},\ SH = \sqrt{SB^2 - BH^2} = \sqrt{SB^2 - \frac{BC^2}{4}} = 2\sqrt{10}.$$

По теореме косинусов

$$\cos\angle ASH = \frac{SA^2 + SH^2 - AH^2}{2SA \cdot SH} = \frac{49 + 40 - 27}{2 \cdot 7 \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{31\sqrt{10}}{140}.$$

Ответ: б) $\arccos\dfrac{31\sqrt{10}}{140}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1

Окончание табл.

Содержание критерия	Баллы
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\log_{0,5}(12-6x)\ge\log_{0,5}\left(x^2-6x+8\right)+\log_{0,5}(x+3)$.

Решение.

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_{0,5}(6(2-x))\ge\log_{0,5}((4-x)(2-x))+\log_{0,5}(x+3);$$

$$\log_{0,5}6+\log_{0,5}(2-x)\ge\log_{0,5}(4-x)+\log_{0,5}(2-x)+\log_{0,5}(x+3).$$

Неравенство определено при $-3<x<2$, поэтому при $-3<x<2$ неравенство принимает вид:

$$6\le(4-x)(x+3);\ 6\le12+x-x^2;\ x^2-x-6\le0,$$

откуда $-2\le x\le3$. Учитывая ограничение $-3<x<2$, получаем: $-2\le x<2$.

Ответ: $[-2;\ 2)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки −2, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 15 января планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20 % больше суммы, взятой в кредит? (Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

Решение.

Пусть сумма кредита равна S, а кредит планируется взять на n месяцев. По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S;\ \frac{S(n-1)}{n};\ \frac{2S}{n};\ \frac{S}{n};\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $1\,\%$, значит, последовательность размеров долга на 1-е число каждого месяца такова:

$$1{,}01S;\ \frac{1{,}01S(n-1)}{n};\ \ldots;\ \frac{2{,}02S}{n};\ \frac{1{,}01S}{n}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$0{,}01S+\frac{S}{n};\ \frac{0{,}01S(n-1)}{n}+\frac{S}{n};\ \ldots;\ \frac{0{,}02S}{n}+\frac{S}{n};\ \frac{0{,}01S}{n}+\frac{S}{n}.$$

Всего следует выплатить

$$S+0{,}01S\left(\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\ldots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\right)=S\left(1+\frac{0{,}01(n+1)}{2}\right).$$

Общая сумма выплат на $20\,\%$ больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$\frac{0{,}01(n+1)}{2}=0{,}2;\ n=39.$$

Ответ: 39.

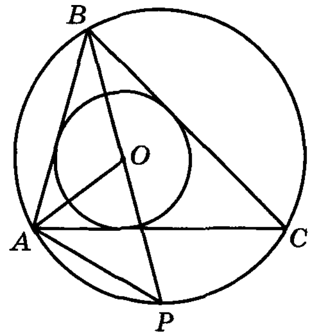
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Прямая BO вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке P.

а) Докажите, что $\angle POA=\angle PAO$.

б) Найдите площадь треугольника APO, если радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 6, $\angle BAC=75°$, $\angle ABC=60°$.

Решение.



а) Поскольку точка O — центр вписанной в треугольник ABC окружности, лучи AO и BO являются биссектрисами углов треугольника ABC. Угол POA является внешним углом треугольника AOB. Следовательно,

$$\angle POA=\angle BAO+\angle ABO=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC.$$

Углы PAC и PBC равны, поскольку опираются на одну и ту же дугу окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому

$$\angle PAO = \angle PAC + \angle OAC = \angle PBC + \angle OAC = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Таким образом, $\angle POA = \angle PAO$.

б) Пусть $R = 6$ — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Поскольку $\angle POA = \angle PAO$, треугольник APO равнобедренный, следовательно,

$$OP = AP = 2R\sin\angle ABP = 2R\sin 30^\circ = 6.$$

Таким образом, площадь треугольника APO равна

$$\frac{AP\cdot OP\cdot \sin\angle APO}{2} = \frac{AP^2\cdot \sin\angle ACB}{2} = \frac{AP^2\cdot \sin 45^\circ}{2} = 9\sqrt{2}.$$

Ответ: б) $9\sqrt{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x| - 2x - 2 - a}{x^2 - 2x - a} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $|3x| - 2x - 2 - a = 0$, для которых выполнено условие $x^2 - 2x - a \neq 0$.

При $x \le 0$ уравнение $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ принимает вид $-5x - 2 - a = 0$ и задаёт на плоскости Oxa луч l_1 с началом в точке $(0; -2)$. При $x \ge 0$ уравнение $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ принимает вид $x - 2 - a = 0$ и задаёт луч l_2 с началом в точке

(0; −2). Значит, уравнение $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ имеет два корня при $a > -2$, имеет один корень при $a = -2$ и не имеет корней при $a < -2$.

Уравнение $x^2 - 2x - a = 0$ задаёт параболу $a = x^2 - 2x$.

Координаты точек пересечения параболы $a = x^2 - 2x$ с лучом l_1 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a = x^2 - 2x, \\ a = -5x - 2, \\ x \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -5x - 2 = x^2 - 2x, \\ a = -5x - 2; \\ x \le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)(x+2) = 0, \\ a = -5x - 2, \\ x \le 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a = x^2 - 2x$ пересекается с лучом l_1 в точках (−1; 3) и (−2; 8).

Координаты точек пересечения параболы $a = x^2 - 2x$ с лучом l_2 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a = x^2 - 2x, \\ a = x - 2, \\ x \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 = x^2 - 2x, \\ a = x - 2, \\ x \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-2) = 0, \\ a = x - 2, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a = x^2 - 2x$ пересекается с лучом l_2 в точках (1; −1) и (2; 0).

Следовательно, условие $x^2 - 2x - a \ne 0$ выполнено для корней уравнения $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ при всех a, кроме $a = -1$, $a = 0$, $a = 3$ и $a = 8$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.

Ответ: $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a = -2$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a = 8$, $a = 3$ и/или $a = -2$, или множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a = 0$, $a = -1$ и/или $a = -2$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и лучей (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 В ящике лежит 76 фруктов, масса каждого из которых выражается целым числом граммов. В ящике есть хотя бы два фрукта различной массы, а средняя масса всех фруктов равна 100 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых меньше 100 г, равна 85 г. Средняя масса фруктов, масса каждого из которых больше 100 г, равна 124 г.

а) Могло ли в ящике оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г?

б) Могло ли в ящике оказаться меньше 8 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г?

в) Какую наибольшую массу может иметь фрукт в этом ящике?

Решение.

а) Пусть в ящике k фруктов массой меньше 100 г, k фруктов массой больше 100 г и $(76-2k)$ фруктов массой ровно 100 г. Тогда

$$85k+124k+100\cdot(76-2k)=7600;\ 9k=0,$$

но все фрукты не могут быть одной массы, значит, в ящике не могло оказаться поровну фруктов массой меньше 100 г и фруктов массой больше 100 г.

б) Пусть в ящике k фруктов массой меньше 100 г, m фруктов массой ровно 100 г и n фруктов массой больше 100 г. Тогда

$$85k+100m+124n=100\cdot(k+m+n);\ 8n=5k.$$

Поскольку числа 5 и 8 взаимно просты,

$$k=8s,\ n=5t;\ 40s=40t;\ s=t.$$

Таким образом, $k+n=8s+5s=13s$. Следовательно, количество фруктов с массой, отличной от 100 г, делится на 13, и $13s\le 76$, то есть $s\le 5$ и $k+n\le 65$. Значит,

$$m=76-(k+n)\ge 76-65=11.$$

Следовательно, в ящике не могло оказаться меньше 8 фруктов, масса каждого из которых равна 100 г.

в) Пусть масса самого тяжёлого фрукта равна x г, тогда

$$124n\ge x+101\cdot(n-1);\ x\le 23n+101.$$

В пункте *б* было показано, что $n=5s$ и $s\le 5$, значит,

$$n\le 25;\ x\le 23\cdot 25+101;\ x\le 676.$$

Покажем, что масса самого тяжёлого фрукта может быть 676 г. Если в ящике 40 фруктов массой 85 г, 11 фруктов массой 100 г, 24 фрукта массой 101 г и 1 фрукт массой 676 г, то условия задачи выполнены.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 676.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Вариант 27

12 а) Решите уравнение $24\cdot 4^{x-0,5}-11\cdot 2^{x+1}+6=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-1;\ 1]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$12\cdot 4^x-22\cdot 2^x+6=0;\ 6\cdot 4^x-11\cdot 2^x+3=0.$$

Сделаем замену: $2^x=t$. Получим: $6t^2-11t+3=0$, откуда $t=\frac{1}{3}$ или $t=\frac{3}{2}$.

Тогда $2^x=\frac{1}{3}$ или $2^x=\frac{3}{2}$, следовательно, $x=-\log_2 3$, или $x=\log_2 1{,}5$.

б) $-\log_2 3<-1$; $0<\log_2 1{,}5<1$, поэтому отрезку $[-1;\ 1]$ принадлежит только корень $\log_2 1{,}5$.

Ответ: а) $-\log_2 3$; $\log_2 1{,}5$; б) $\log_2 1{,}5$.

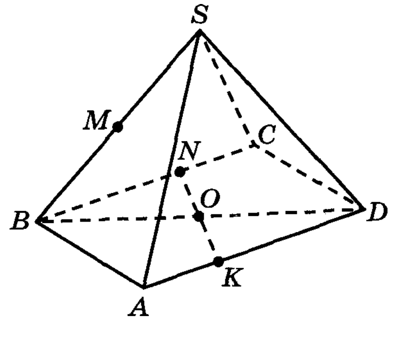
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

13 Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=15$ и $BC=25$. Все боковые рёбра пирамиды равны $5\sqrt{17}$. На рёбрах AD и BC отмечены соответственно точки K и N так, что $AK=CN=8$. Через точки K и N проведена плоскость α, перпендикулярная ребру SB.

а) Докажите, что плоскость α проходит через точку M — середину ребра SB.

б) Найдите расстояние между прямыми DS и KM.

Решение.



а) Пусть точка O — пересечение BD и NK. Отрезки BN и KD равны и параллельны, поэтому точка O — середина BD.

Рассмотрим треугольник BSD:

$$BD^2=BA^2+AD^2=15^2+25^2=850 \text{ и}$$

$$BS^2+SD^2=2\cdot\left(5\sqrt{17}\right)^2=850.$$

Значит, треугольник BSD прямоугольный с прямым углом BSD.

Плоскость α перпендикулярна ребру BS, поэтому она параллельна прямой SD. Следовательно, плоскость α пересекает плоскость BSD по прямой, параллельной прямой SD, то есть по прямой OM, содержащей среднюю линию треугольника BSD.

б) Искомое расстояние равно расстоянию от прямой SD до параллельной ей плоскости α, содержащей прямую KM. Следовательно, это расстояние равно длине перпендикуляра SM, проведённого от прямой SD к плоскости α.

$$SM=\frac{1}{2}SB=\frac{5\sqrt{17}}{2}.$$

Ответ: б) $\frac{5\sqrt{17}}{2}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $\sqrt{x+\frac{1}{2}}\cdot\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2|1-x|\right)\ge 0$.

Решение.

При $x=-\frac{1}{2}$ левая часть неравенства имеет смысл и равна нулю.

При условии $x>-\frac{1}{2}$ получаем неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2|1-x|\right)\ge 0,$$

откуда

$$0<\log_2|1-x|\le 1;\ 1<|1-x|\le 2.$$

Следовательно, $-1\le x<0$ или $2<x\le 3$. Учитывая условие $x>-\frac{1}{2}$, находим:

$$-\frac{1}{2}<x<0 \text{ или } 2<x\le 3.$$

Объединяя полученные множества, получаем: $-\frac{1}{2} \le x < 0$ или $2 < x \le 3$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};\ 0\right)\cup(2;\ 3]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $-\frac{1}{2}$ и/или точки 3, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 По бизнес-плану четырёхлетний проект предполагает начальное вложение — 25 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 20 % по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: **целое** число n млн рублей и в первый, и во второй годы, а также **целое** число m млн рублей и в третий, и в четвёртый годы. Найдите наименьшее значение n, при котором первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, и наименьшее значение m, такое, что при найденном ранее значении n первоначальные вложения за четыре года вырастут как минимум в четыре раза.

Решение.

К началу 2-го года получится $1{,}2 \cdot 25 + n = 30 + n$ млн вложений, а к началу 3-го года —

$$1{,}2\,(30 + n) + n = 36 + 2{,}2n.$$

По условию $36 + 2{,}2n \ge 50$. Наименьшее целое решение $n = 7$. Тогда к началу 3-го года получится

$$36 + 15{,}4 = 51{,}4 \text{ млн.}$$

К началу 4-го года имеем $1{,}2 \cdot 51{,}4 + m$ млн, а в конце проекта

$$1{,}2\,(1{,}2 \cdot 51{,}4 + m) + m = 74{,}016 + 2{,}2m.$$

По условию $74{,}016 + 2{,}2m \ge 100$,

откуда $2{,}2m \ge 25{,}984$; $m \ge \frac{25{,}984}{2{,}2}$.

Получаем, что $m = 12$ — наименьшее целое решение.

Ответ: 7 и 12 млн руб.

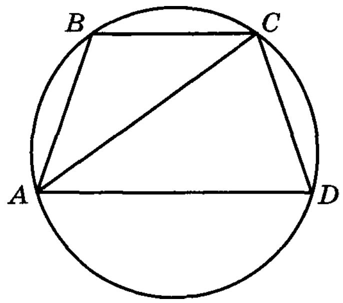
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиусом $R=27$. Известно, что $AB=BC=CD=36$.

а) Докажите, что прямые BC и AD параллельны.

б) Найдите AD.

Решение.



а) Острые углы BCA и CAD равны, поскольку опираются на равные хорды AB и CD. Значит, прямые BC и AD параллельны.

б) Обозначим угол BCA через α. По теореме синусов

$$\sin\alpha=\frac{AB}{2R}=\frac{2}{3}.$$

Треугольник ABC равнобедренный, поэтому $\angle BAC=\angle BCA=\alpha$. Значит, $\angle BAD=\angle BAC+\angle CAD=2\alpha$.

Четырёхугольник $ABCD$ — равнобедренная трапеция, поэтому $\angle CDA=\angle BAD=2\alpha$. Значит,

$$\angle ACD=180^\circ-\angle CAD-\angle CDA=180^\circ-3\alpha.$$

Таким образом, по теореме синусов для треугольников ACD и ACB получаем:

$$\frac{AD}{\sin(180^\circ-3\alpha)}=\frac{AB}{\sin\alpha};\ AD=\frac{\sin3\alpha}{\sin\alpha}\cdot AB=\left(3-4\sin^2\alpha\right)AB=44.$$

Ответ: б) 44.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых линии $y=a|x-2|+|a|-2$ и $y=\frac{a}{2}$ ограничивают многоугольник, площадь которого не более 0,5.

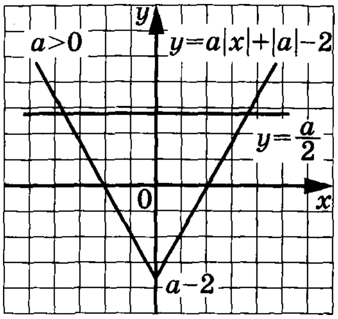
Решение.

1) если линии $y=a|x-2|+|a|-2$ и $y=\frac{a}{2}$ ограничивают фигуру, то её площадь будет равна площади фигуры, ограниченной линиями $y=a|x|+|a|-2$ и $y=\frac{a}{2}$;

2) при $a=0$ линии параллельны и многоугольник не образуют.

<u>а) $a>0$</u>.

Линии $y=a|x|+a-2$ и $y=\frac{a}{2}$ ограничивают фигуру (треугольник) при $\frac{a}{2}>a-2$, откуда $a<4$ (см. рисунок).



Найдём абсциссы точек пересечения линий:

$$a|x|+a-2=\frac{a}{2},\ \text{откуда}\ |x|=\frac{2}{a}-\frac{1}{2}.$$

Поэтому площадь полученного треугольника равна

$$\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}-a+2\right)=\frac{\left(2-\frac{a}{2}\right)^2}{a}.$$

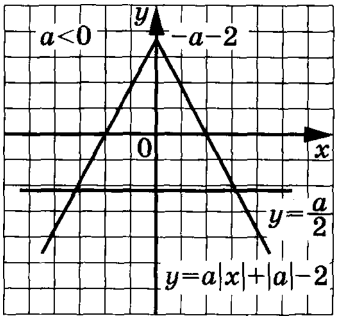
Решим неравенство $\frac{\left(2-\frac{a}{2}\right)^2}{a}\le 0{,}5$; $a^2-10a+16\le 0$.

Получим $2\le a\le 8$.

С учётом условия $0<a<4$ получим $2\le a<4$.

<u>б) $a<0$</u>.

Линии $y=a|x|-a-2$ и $y=\frac{a}{2}$ ограничивают фигуру (треугольник) при $\frac{a}{2}<-a-2$, откуда $a<-\frac{4}{3}$ (см. рисунок).



Найдём абсциссы точек пересечения линий:

$$a|x|-a-2=\frac{a}{2},\ \text{откуда}\ |x|=\frac{2}{a}+\frac{3}{2}.$$

Поэтому площадь полученного треугольника равна

$$\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-a-2-\frac{a}{2}\right)=\frac{\left(2+\frac{3a}{2}\right)^2}{-a}$$

Решим неравенство $\frac{\left(2+\frac{3a}{2}\right)^2}{-a}\le 0{,}5$; $9a^2+26a+16\le 0$.

Получим $-2\le a\le -\frac{8}{9}$.

С учётом условия $a<-\frac{4}{3}$ получим $-2\le a<-\frac{4}{3}$.

Ответ: $\left[-2;\ -\frac{4}{3}\right)\cup[2;\ 4)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только исключением точек $a=-2$ и/или $a=2$	3
В решении верно найдены все граничные точки множества значений a $\left(a=-2,\ a=-\frac{4}{3},\ a=2,\ a=4\right)$, но неверно определены промежутки значений a, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получен хотя бы один из промежутков $\left[-2;-\frac{4}{3}\right)$ или $[2;4)$, возможно, с включением/исключением граничных точек, ИЛИ задача верно сведена к исследованию взаимного расположения двух лучей с общей вершиной и прямой (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 Издательство на выставку привезло несколько книг для продажи (каждую книгу привезли в единственном экземпляре). Цена каждой книги — натуральное число рублей. Если цена книги меньше 100 рублей, на неё приклеивают бирку «выгодно». Однако до открытия выставки цену каждой книги увеличили на 10 рублей, из-за чего количество книг с бирками «выгодно» уменьшилось.

а) Могла ли уменьшиться средняя цена книг с биркой «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг с биркой «выгодно» до открытия выставки?

б) Могла ли уменьшиться средняя цена книг без бирки «выгодно» после открытия выставки по сравнению со средней ценой книг без бирки «выгодно» до открытия выставки?

в) Известно, что первоначально средняя цена всех книг составляла 110 рублей, средняя цена книг с биркой «выгодно» составляла 81 рубль, а средняя цена книг без бирки — 226 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 90 рублей, а средняя цена книг без бирки — 210 рублей. При каком наименьшем количестве книг такое возможно?

Решение.

а) Предположим, что продавались всего три книги, которые первоначально стоили 120, 94 и 20 рублей. Средняя цена «выгодных» книг составляет $\frac{94+20}{2}=57$ рублей. После увеличения цены книги стали стоить 130, 104 и 30 рублей. Теперь средняя цена «выгодных» книг составляет 30 рублей.

б) В примере из предыдущего пункта первоначально средняя цена «невыгодных» книг составляет 120 рублей, а после увеличения $\frac{130+104}{2}=117$ рублей.

в) Пусть всего привезли n книг. Первоначально «выгодных» было x книг, после увеличения цены выгодных стало y книг. Средняя цена всех книг после увеличения составляет 120 рублей. Получаем два уравнения:

$$110n=226(n-x)+81x \text{ и } 120n=210(n-y)+90y,$$

откуда $116n=145x$, то есть $4n=5x$, и $90n=120y$, то есть $3n=4y$. Поэтому число n кратно 4 и 5, то есть кратно 20. Таким образом, $n\geq 20$.

Покажем, что возможен случай $n=20$.

Пусть первоначально было 15 книг по 80 рублей, одна книга — по 96 рублей и четыре книги по 226 рублей. Тогда средняя цена всех книг 110 рублей, средняя цена книг с биркой «выгодно» 81 рубль, а средняя цена книг без бирки — 226 рублей. После увеличения цены средняя цена книг с биркой «выгодно» составила 90 рублей, а средняя цена книг без бирки — 210 рублей. Все условия выполнены.

Ответ: а) да; б) да; в) 20.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Вариант 31

12 а) Решите уравнение $\cos x + 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}\sin 2x - 1$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

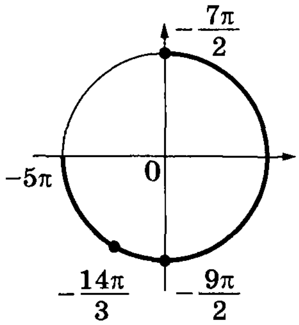
а) Преобразуем уравнение:

$$\cos x + \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = \sqrt{3}\sin 2x - 1;$$
$$\cos x + 2\cos^2 x - 1 = -1;$$
$$\cos x \cdot (1 + 2\cos x) = 0.$$

Значит, $\cos x = 0$ или $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

Получим числа $-\frac{9\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2}$ и $-\frac{14\pi}{3}$.



Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решением линейных неравенств и т. п.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2}$, $-\frac{14\pi}{3}$.

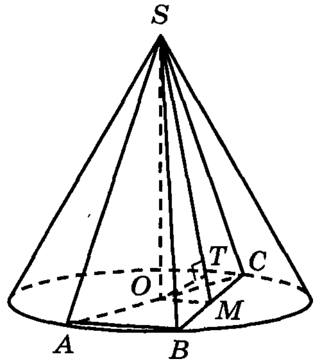
Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

13 Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S, причём A и C диаметрально противоположны. Точка M — середина BC.

а) Докажите, что прямая SM образует с плоскостью ABC такой же угол, как и прямая AB с плоскостью SBC.

б) Найдите угол между прямой SA и плоскостью SBC, если $AB = 6$, $BC = 8$ и $SC = 5\sqrt{2}$.

Решение.



а) Проекция точки S на плоскость основания конуса — центр O его основания. Так как $OM \perp BC$ и $SM \perp BC$, угол наклона SM к ABC — это угол SMO. Этот же угол является углом между прямой OM и плоскостью SBC. Угол между прямой AB и SBC такой же, так как прямые OM и AB параллельны.

б) Синусом искомого угла является число $\frac{h}{SA}=\frac{h}{5\sqrt{2}}$, где h — расстояние от точки A до плоскости SBC. Расстояние от точки O до плоскости SBC равно $\frac{h}{2}$ (так как O — середина CA). Это расстояние — высота OT прямоугольного треугольника SOM, которая равна $\frac{SO \cdot OM}{SM}$.

$OM=\frac{AB}{2}=3$, $SM=\sqrt{SC^2-MC^2}=\sqrt{34}$ и $SO=\sqrt{SM^2-MO^2}=5$, поэтому $\frac{h}{2}=\frac{SO \cdot OM}{SM}=\frac{15}{\sqrt{34}}$.

Следовательно, синус искомого угла равен $\frac{h}{5\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{17}}$.

Ответ: б) $\arcsin\frac{3}{\sqrt{17}}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

14 Решите неравенство $4\log_4^2\left(\sin^3 x\right)+8\log_2(\sin x)\geq 1$.

Решение.

Преобразуем выражение $9\log_2^2(\sin x)+8\log_2(\sin x)-1\geq 0$ при условии $\sin x>0$. Пусть $\log_2(\sin x)=t$, тогда $9t^2+8t-1\geq 0$, откуда $t\leq -1$ или $t\geq \frac{1}{9}$.

Следовательно, $0<\sin x\leq 0{,}5$ или $\sin x\geq \sqrt[9]{2}$. Второе неравенство невозможно, а из неравенства $0<\sin x\leq 0{,}5$ получаем:

$$2\pi k<x\leq \frac{\pi}{6}+2\pi k \text{ или } \frac{5\pi}{6}+2\pi k\leq x<\pi+2\pi k, \text{ где } k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left(2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$, $\left[\frac{5\pi}{6}+2\pi k; \pi+2\pi k\right)$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением множества $\frac{\pi}{6}+2\pi k$ и/или множества $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

15 Планируется выдать льготный кредит на целое число миллионов рублей на четыре года. В середине каждого года действия кредита долг заёмщика возрастает на 20 % по сравнению с началом года. В конце 1-го и 2-го годов заёмщик выплачивает только проценты по кредиту, оставляя долг неизменно равным первоначальному. В конце 3-го и 4-го годов заёмщик выплачивает одинаковые суммы, погашая весь долг полностью. Найдите наименьший размер кредита, при котором общая сумма выплат заёмщика превысит 8 млн рублей.

Решение.

Обозначим размер кредита через S. В конце 1-го и 2-го годов заёмщик выплачивает по $0{,}2S$. Всего $0{,}4S$ за два года.

Рассмотрим погашение кредита за следующие два года. В середине 3-го года долг возрастёт до $1{,}2S$. Обозначим через x размер выплачиваемой суммы в конце 3-го и 4-го годов. После выплаты в конце 3-го года долг равен $1{,}2S-x$, а в середине 4-го года он равен $1{,}2(1{,}2S-x)$. В конце 4-го года весь долг должен быть погашен, то есть последняя выплата равна $1{,}2(1{,}2S-x)$ и по условию равна x. Значит,

$$1{,}2(1{,}2S-x)=x,\ 2{,}2x=1{,}44S,\ x=\frac{144}{220}S=\frac{36}{55}S,$$

и общий размер выплат равен $0{,}4S+\frac{72}{55}S=\frac{94}{55}S$. По условию

$$\frac{94}{55}S>8,\ 94S>440.$$

При $S=5$ это неравенство верно, а при $S=4$ оно неверно, как и при меньших S.

Ответ: 5 млн рублей.

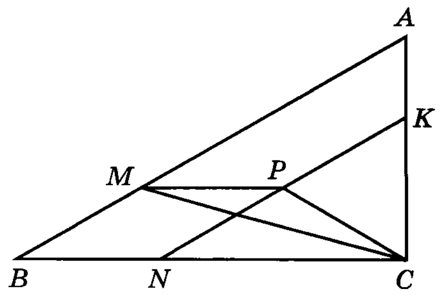
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

16 На гипотенузе AB и катетах BC и AC прямоугольного треугольника ABC отмечены точки M, N и K соответственно, причём прямая NK параллельна прямой AB и $BM=BN=\frac{1}{2}KN$. Точка P — середина отрезка KN.

а) Докажите, что четырёхугольник $BCPM$ — равнобедренная трапеция.
б) Найдите площадь треугольника ABC, если $BM=1$ и $\angle BCM=15°$.

Решение.

а) Поскольку прямая NP параллельна прямой BM и $NP=\frac{1}{2}KN=BM=BN$, четырёхугольник $BNPM$ — ромб. Значит, прямая PM параллельна прямой BC, а так как CP — медиана прямоугольного треугольника KCN, проведённая из вершины прямого угла, то



$$CP=\frac{1}{2}KN=BN=PM=BM.$$

Следовательно, четырёхугольник $BCPM$ — равнобедренная трапеция.

б) Поскольку $CP=\frac{1}{2}KN=BN=PM$, треугольник CPM равнобедренный, поэтому

$$\angle PCM=\angle CMP=\angle BCM.$$

Значит, CM — биссектриса угла BCP. Тогда

$$\angle ABC=\angle MBC=\angle BCP=2\angle BCM=2\cdot 15°=30°,$$

$$\angle KNC=\angle ABC=30°,\ CN=KN\cos 30°=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3},$$

$$BC=CN+BN=\sqrt{3}+1,\ AC=BC\operatorname{tg}30°=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+3}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*3*

17 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(ay-ax+2)(y-x+3a)=0,\\ |xy|=a\end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

Решение.

Из второго уравнения системы получаем: $a\geq 0$.

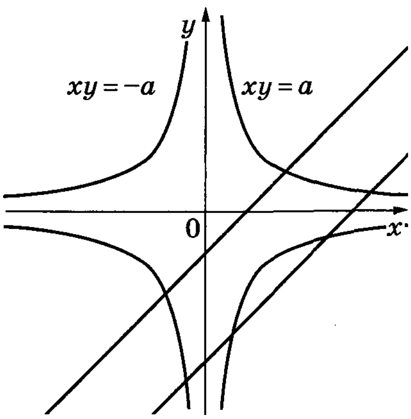
Если $a=0$, то получаем систему

$$\begin{cases}y-x=0,\\ xy=0,\end{cases}\text{ откуда } x=y=0.$$

Значит, $a>0$. Получим систему

$$\begin{cases}(a(y-x)+2)(y-x+3a)=0,\\ |xy|=a,\end{cases}$$

откуда $y-x=-\frac{2}{a}$ или $y-x=-3a$, $xy=\pm a$.



На координатной плоскости мы получаем две параллельные прямые и две гиперболы. Если две прямые совпадают, то шесть различных решений невозможно. Поэтому $\frac{2}{a}\neq 3a$, откуда $a\neq\sqrt{\frac{2}{3}}$.

При этом условии гипербола $y=\frac{a}{x}$ пересекает каждую из прямых в двух различных точках. Это даёт четыре различных решения данной системы.

Ещё два решения получаются при пересечении прямых гиперболой $y=-\frac{a}{x}$ в двух различных точках. Для этого нужно, чтобы гипербола дважды пересекала ту прямую, что дальше от начала координат, и не имела общих точек с прямой, что ближе к началу координат. Для этого нужно, чтобы из двух квадратных уравнений

$$x^2-\frac{2}{a}x+a=0 \text{ и } x^2-3ax+a=0$$

одно имело ровно два различных корня, а другое не имело корней. Дискриминанты этих уравнений должны быть противоположных знаков. Получаем:

$$\left(\frac{4}{a^2}-4a\right)\left(9a^2-4a\right)<0.$$

Учитывая, что $a>0$, приходим к неравенству

$$\left(a^3-1\right)(9a-4)>0,$$

откуда $a<\frac{4}{9}$ или $a>1$.

Ответ: $0<a<\frac{4}{9}$; $a>1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a=1$ и/или $a=\frac{4}{9}$	3
В решении верно найдены все граничные точки множества значений a $\left(a=1,\ a=\frac{4}{9},\ a=\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, но неверно определены промежутки значений a, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получены два промежутка $\left(-\infty;\frac{4}{9}\right)$ и $(1;+\infty)$, возможно, с включением граничных точек, ИЛИ задача верно сведена к исследованию взаимного расположения гипербол и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

18 Известно, что в кошельке лежало n монет, каждая из которых могла быть достоинством 2, 5 или 10 рублей. Аня сделала все свои покупки, расплатившись за каждую покупку отдельно без сдачи только этими монетами, потратив при этом все монеты из кошелька.

а) Могли ли все её покупки состоять из блокнота за 56 рублей и ручки за 29 рублей, если $n = 14$?

б) Могли ли все её покупки состоять из чашки чая за 10 рублей, сырка за 15 рублей и пирожка за 20 рублей, если $n = 19$?

в) Какое наименьшее количество пятирублёвых монет могло быть в кошельке, если Аня купила только альбом за 85 рублей и $n = 24$?

Решение.

а) Да. Например, заплатив за блокнот 5 десятирублёвых монет и 3 двухрублёвые монеты (8 монет), а за ручку 1 десятирублёвую монету, 3 пятирублёвые и 2 двухрублёвые (6 монет).

б) Предположим, что Аня сделала покупки требуемым образом. За чашку чая она заплатила либо 1 десятирублёвую монету, либо 2 пятирублёвые, либо 5 двухрублёвых. За сырок Аня должна была заплатить хотя бы одну пятирублёвую монету, а набрать оставшиеся 10 рублей можно одним из трёх указанных выше способов. Значит, за сырок она заплатила либо 2, либо 3, либо 6 монет. Следовательно, за чай и сырок она заплатила либо 11 монет, либо не более 8 монет.

В первом случае она заплатила за пирожок 8 монет. Они не могли быть все двухрублёвые. Значит, среди них либо была десятирублёвая монета, либо по крайней мере две пятирублёвые монеты. Оставшиеся 10 рублей нельзя набрать 6 или 7 монетами. Пришли к противоречию.

Во втором случае она заплатила за пирожок не менее 11 монет. Это также невозможно, поскольку тогда получилось бы не менее 22 рублей.

Полученные противоречия показывают, что Аня не могла сделать указанные покупки требуемым образом.

в) Пусть Аня купила альбом за 85 рублей, потратив 24 монеты: k двухрублёвых, l пятирублёвых и m десятирублёвых. Тогда $2k + 5l + 10m = 85$ и $k + l + m = 24$. Отсюда получаем $k = 24 - l - m$, $48 - 2l - 2m + 5l + 10m = 85$ и $8m = 37 - 3l$. Значит, $37 - 3l$ делится на 8. Следовательно, число l нечётно. При l равном 1, 3 и 5 выражение $37 - 3l$ равно 34, 28 и 22 соответственно и не делится на 8.

Пример $k = 15$, $l = 7$ и $m = 2$ показывает, что Аня могла заплатить ровно 7 пятирублёвых монет.

Ответ: а) да; б) нет; в) 7.

Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение пункта *а*; – обоснованное решение пункта *б*; – искомая оценка в пункте *в*; – пример в пункте *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*4*

Издание для дополнительного образования

ЕГЭ. ФИПИ — школе

ЕГЭ. МАТЕМАТИКА

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

ТИПОВЫЕ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ ВАРИАНТЫ
36 ВАРИАНТОВ

Под редакцией *Ивана Валериевича Ященко*

Главный редактор *И. Федосова*
Ответственный редактор *О. Чеснокова*
Художественный редактор *О. Медведева*
Компьютерная вёрстка *Е. Осипова*
Корректор *И. Мерзликина*

Подписано в печать 01.10.2021. Формат $60\times90^1/_8$.
Усл. печ. л. 28,0. Печать офсетная.
Бумага типографская. Тираж 120 000 экз. Заказ 210920.

ООО «Издательство «Национальное образование»
119021, Москва, ул. Россолимо, д. 17, стр. 1, тел. +7 (495) 788-00-75(76)

Свои пожелания и предложения по качеству и содержанию книг
Вы можете сообщить по эл. адресу: editorial@nobr.ru

Отпечатано в ООО «Первый полиграфический комбинат»
143405, Московская область, г. Красногорск,
Ильинское шоссе – 4 км с. 55, п/о Красногорск-5
www.1pk.ru