МАТЕМАТИКА

МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ №4 (792)

ИЗДАЕТСЯ С 1992 г.

МАТЕМАТИКА

Методический журнал
для учителей математики
Издается с 1992 г.
Выходит 10 раз в год

Издательство МЦНМО
БОЛЬШОЙ ВЛАСЬЕВСКИЙ ПЕР., 11,
МОСКВА, 119002

Издается совместно с
РОССИЙСКОЙ АССОЦИАЦИЕЙ
УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
Страничка журнала на сайте РАУМ:
raum.math.ru/node/179

8 (499) 241-89-79
mat@mccme.ru
mat@1september.ru

По вопросам распространения
обращаться по телефону (499) 745-80-31
e-mail: biblio@mccme.ru

Иллюстрации:
goods-for-art.livejournal.com (автор egida),
carsonellis.com, etomesto.ru, punktum.ru,
behance.net (автор Alexey Kurbatov),
thebristolboard.tumblr.com,
moswalks.livejournal.com, dic.academic.ru
depositphotos.com

Зарегистрировано ПИ №ФС77-66437 от 14.07.16 в Роскомнадзоре

Подписано в печать: 15.04.2018
Тираж: 3000 экз.

Для получения доступа
к журналу «Математика»
в электронном виде
необходима регистрация
школы в системе «СтатГрад».
Подробнее см. на сайте
https://statgrad.org/#2619

ТЕМА НОМЕРА: КАКИЕ ТЕХНОЛОГИИ МЫ ИСПОЛЬЗУЕМ?

В НОМЕРЕ

К статьям, обозначенным этим символом, есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

НАВСТРЕЧУ ЧМ-2018!

Л. РОСЛОВА

Математика настолько всеобъемлюща, что способна проникать во все аспекты жизни общества. Можно принимать это за аксиому, а можно не переставать удивляться.

Возьмем, к примеру, грядущий Чемпионат мира по футболу и посмотрим, как связана математика с футболом.

Из доступных учащимся связей можно назвать такие, как форма футбольного мяча, размеры и разметка поля, форма стадиона и его освещение, варианты расстановки футболистов на позициях, рейтинг футбольных команд, статистика матчей, финансы. В принципе, в Интернете уже можно найти ученические проекты по этой теме. Приведу здесь три ссылки на работы хорошего качества:

- infourok.ru/prezentaciya-i-rabota-matematika-i-futbol-453499.html
- school-herald.ru/ru/article/view?id=284
- nsportal.ru/ap/library/nauchno-tekhnicheskoe-tvorchestvo/2015/02/28/matematika-v-futbole

Для более детального изучения и рассмотрения более сложных математических связей придется применять методы теории исследования операций. Прежде всего это будут задачи, связанные с распределением игровых амплуа в команде, с системой организации чемпионатов, а также с составлением диет, удовлетворяющих определенным медицинским и физиологическим требованиям, с разработкой индивидуального режима тренировок. Заглянуть за информацией можно сюда:

- sites.google.com/site/footballworl2018/matematika-v-futbole/matematika-i-futbol.

Но не всегда хочется вникать так глубоко. Если есть желание ограничиться решением занимательных олимпиадных задач с футбольным колоритом, всегда можно найти несколько соответствующих задачек, например, здесь:

- repetitor-problem.net/futbol-i-matematika.

И не надо думать, что связь математики и футбола была выявлена и зафиксирована лишь с приходом в нашу жизнь Интернета. Отнюдь. Напомню о книге, вышедшей в библиотечке «Кванта» уже довольно давно — в 1985 году: Садовский Л.Е., Садовский А.Л. Математика и спорт. — М.: Наука, 1985. — (Серия «Библиотечка «Квант». Выпуск 44). В Сети ее, конечно, тоже можно найти, например, здесь:

- math.ru/lib/book/djvu/bib-kvant-15/Kv44-85_Matematika_i_Sport_L.E.Sadovsky.djvu.

Думаю, о ЧМ-2018 будут говорить еще долго после его окончания, а все эти сюжеты не потеряют своей актуальности и в следующем учебном году.

А мне вспоминается Чемпионат мира 1998 года. Весь месяц, пока шли матчи, я занималась с одним мальчиком — футбольным фанатом. Чтобы поддерживать его интерес к занятиям, приходилось быть в курсе всех событий чемпионата и время от времени подбрасывать ему задачки с футбольным содержанием.

Помогло — планируемый результат был достигнут. Спасибо Альберту — тогда я всерьез задумалась на тему мотивации обучения.

А. МОЛОКОВА,
Е. РУДАКОВА,
Т. СМОЛЕУСОВА,
А. ТИХВИНСКАЯ,
г. Новосибирск

Часть 1

МЕТОДИКИ И ТЕХНОЛОГИИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Введение

В конце 2017 года авторами статьи было проведено анкетирование учителей математики общеобразовательных организаций по проблеме использования технологий и методик обучения математике (с использованием Google-формы). В анкетировании приняли участие более 1000 учителей математики из 36 регионов и субъектов РФ. Из них 45,7% составили учителя Новосибирской области, 22% — Костромской области, 7,7% — Забайкальского края, 4,8% — Смоленской области, 2,8% — Рязанской области. Процент участия учителей каждого из других регионов составил не более 2%.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы.

93% опрошенных отмечают существование различия между понятиям «методика» и «технология» обучения, 3% опрошенных не видят различий в содержании этих понятий, 3,5% затрудняются дать ответ.

88% опрошенных согласны с тем, что на современном уроке математики обязательно применение образовательных технологий и методик; около 47% опрошенных предпочитают использовать современные образовательные технологии, 30% — проверенные временем методики и методы обучения, 23% творчески проводят уроки математики, опираясь на собственную систему преподавания, 8,5% не считают нужным использовать образовательные технологии и методики в своей педагогической практике, 3% затрудняются ответить.

Главной причиной затруднений в использовании технологий и методик обучения математике, по мнению опрошенных учителей, является недостаточность материально-технической базы в школе (34%). Учителями указываются и другие причины, такие как: нехватка времени на подготовку к урокам (26%), ограничение временными рамками урока (20%), недостаточность знаний о наличии технологий и методик в обучении математике (10%), недостаточное описание компонентов технологий и методик в методической литературе (8%), особенность контингента учащихся (0,1%), сдвоенные и строенные класс-комплекты, отсутствие методической литературы, трудности «в изменении сознания» учителя, собственный консерватизм. Однако есть среди опрошенных учителя, которые отмечают отсутствие затруднений (1%), наличие способностей подстроиться под уровень детей и применять различные методики и технологии.

Анализ ответов на вопрос «Какие из перечисленных технологий и методик обучения математике вы применяете?» позволяет провести ранжирование применяемых технологий и методик обучения математике (табл. 1).

Таблица 1

Технологии / методы	Число выбравших данную технологию (%)
ИКТ	73,9
Технология проблемного обучения	70,6
Технология уровневой дифференциации	62,9
Исследовательский метод	47,6
Проектный метод	42,7
Диалоговый метод	41,3
Технология решения проектных задач	31,1
Адаптивная технология	15,7
Интерактивные математические уроки-экскурсии	14,7
Авторская методика В.Ф. Шаталова	11,7
ТРИЗ	11,7
Технологии образного моделирования	11,6
Технология РКМЧП	9,9
Технология полного усвоения знаний	7,6
Авторская методика Р.Г. Хазанкина	3,1

Как видно из таблицы 1, в ранге используемых технологий лидируют информационно-коммуникационные, что является следствием информатизации образования и обусловлено требованиями ФГОС общего образования, связанными, в частности, с созданием информационно-образовательной среды. Следующие шесть технологий и методов (технологии проблемного обучения, уровневой дифференциации, исследовательский, проектный, диалоговый методы, технология решения проектных задач) также являются наиболее эффективными для достижения планируемых результатов обучения математике по ФГОС ОО. Среди опрошенных около 15% — учителя, применяющие авторские методики В.Ф. Шаталова и Р.Г. Хазанкина. Приблизительно такие же доли занимают в практике обучения математике адаптивная технология и интерактивные математические уроки-экскурсии. От 7% до 12% учителей выбрали в качестве используемых такие технологи, как ТРИЗ, технологии образного моделирования, технологию РКМЧП, технологию полного усвоения знаний. Единичные учителя отмечают использование в педагогической практике технологии педагогических мастерских, задачной, игровой технологий, социоигровой технологии, здоровьесберегающих технологий, технологии индивидуального обучения, обучения в сотрудничестве, технологию УДЕ.

Встречались и ответы, свидетельствующие о недостаточном понимании сущности понятия «технология». Например, за технологии ошибочно принимаются методики и подходы к обучению: индивидуальные траектории, самостоятельная работа в малых группах, элементы дистанционного обучения, формирование умственных действий по Гальперину, таксономия Блума и др.

51% опрошенных учителей работает с детьми, имеющими статус ОВЗ. 87,7% педагогов указывают на необходимость применения в работе с этой категорией детей особых методик и технологий. Однако только 23,7% учителей используют в работе специальные (по их мнению) методики и технологии обучения учащихся с ОВЗ. Среди названных: методика обучения детей с проблемами слуха математике Сухова, коррекционно-развивающая модель обучения Е.Д. Худенко, здоровьесберегающие технологии, пальчиковая гимнастика А.П. Савиной. Педагоги отмечают использование в педагогической практике работы с детьми с ОВЗ технологий разноуровневого, развивающего, модульного обучения, уровневой дифференциации, адаптивной, игровой, продуктивного чтения, ИКТ, технологии коррекционно-развивающего обучения, здоровьесберегающих технологий, коллективного способа обучения, авторской методики В.Ф. Шаталова.

К методам, применяемым при работе с детьми с ОВЗ, педагоги относят развитие и использование слухового восприятия, обучение по индивидуальной траектории, «дозированная помощь», «подробные памятки», объяснительно-иллюстрированный метод, метод обучения учащихся с интеллектуальной недостаточностью, наглядные опоры — алгоритмы, схемы, шаблоны, рисунки, поэтапное разъяснение заданий, индивидуальное оценивание, решение задач по геометрии по составленному учителем плану, решение упражнений по образцу (заполнение пропусков), работа в парах с успешными учениками, частично-поисковый, объяснительно-иллюстративные методы, модульное обучение, учет индивидуального темпа работы. Заметим, что практически все перечисленные выше технологии и методики не являются специфическими при работе с детьми с ОВЗ. Это говорит о том, что, обучая детей с ОВЗ, педагоги в большинстве случаев не владеют специальными технологиями и методиками обучения и чаще всего используют в педагогической практике технологии и методики обучения детей в массовой школе.

Результаты анкетирования позволяют сделать выводы о необходимости информационной и методической поддержки учителей математики в части разъяснения содержания понятий «методика» и «технология», сущностных характеристик эффективных методик и технологий обучения математике, в том числе детей с ОВЗ и инвалидов.

Особенности отдельных методик и технологий обучения математике

Обратимся к широкому спектру методик и технологий обучения математике. Их значительное количество, разнообразие оснований для классификации и, судя по результатам эмпирического исследования, недостаточно полное представление о них у учителей математики определили подход авторов к изложению в отчете следующей информации.

Далее приведен обзор наиболее известных методик и технологий, затем подробнее описаны те, что наиболее ярко демонстрируют потенциал реализации системно-деятельностного подхода в обучении математике и перспективны для применения в практике современного математического образования.

В группу методик и технологий, известных как традиционные, большинство исследователей относят: технологию организации проведения классно-урочных занятий; технологию полного усвоения знаний, технологию модульного обучения. Каждая из них имеет как преимущества, так и недостатки, опирается на теоретические постулаты и может рассматриваться как имеющая значимый потенциал для эффективного обучения математике. Обзор особенностей традиционных методик и технологий представлен в таблице 2.

К числу технологий и методик личностно ориентированного образования принято относить технологии, разработанные на основе идей педагогики сотрудничества, идей ряда педагогов-новаторов 80-х годов XX века. Идеи и методические решения опирались на достижения советской (Н.К. Крупская, С.Т. Шацкий, А.С. Макаренко, В.А. Сухомлинский и др.), русской (Л.Н. Толстой, К.Д. Ушинский и др.) и зарубежной (Ж.Ж. Руссо, Я. Корчак и др.) педагогики. Характеристики их применимости в современном обучении математике кратко представлены в таблице 3.

Следует отметить, что Ш.А. Амонашвили относил математическое воображение и осмысление «высоких математических понятий» к важнейшим умениям школьников. Наиболее явно их формирование и развитие представлено в описании методик и технологий активизации и интенсификации учебной деятельности (табл. 4).

Особое значение для эффективного обучения математике имеют методики и технологии обучения, разработанные на основе эффективного управления проектированием и реализацией образовательного процесса. Краткий обзор их особенностей представлен в таблице 5.

В представленных группах методик и технологий очевидны пересечения как используемых методов и приемов, так и возможных огра-

Таблица 2

Методики и технологии традиционного обучения математике

Название	Особенности	Преимущества	Недостатки
Классно-урочное обучение	Приоритет — обучение ЗУНам, научность, последовательность и систематичность, доступность, природосообразность, наглядность и проч.	Организационная четкость, упорядоченность, оптимальность затрат	Нерегулярность обратной связи, ограничение времени, монологичность, закрытость, репродуктивность, субъект-объектный характер взаимодействия
Полное усвоение знаний	Приоритет — фиксация единого уровня усвоения. Выделены уровни усвоения (знакомство, алгоритмический и творческий) знаний	Выбор учеником способов достижения единой для всех цели, оценка достижения эталона	Требуются усилия педагога: значительное число диагностических и коррекционных тестов, разбиение содержания на небольшие конкретные единицы
Модульное обучение	Приоритет — самостоятельность ученика в работе с модулем (объединяет содержание и процесс его освоения)	Сокращение сроков, обучение, индивидуализация, возможность гибкого изменения материала, опора на теорию П.Я. Гальперина	Значительные затраты времени на подготовку модулей, затруднения в освоении теории, алгоритм вытесняет творчество

Таблица 3

Педагогика сотрудничества для личностно ориентированного обучения математике

Особенности	Преимущества	Недостатки
Гуманно-личностный подход к ученику. Дидактический активизирующий и развивающий комплекс. Концепция воспитания. Педагогизация окружающей среды	Субъектность ученика. Приоритетность высших этических ценностей. Демократизация отношений учителя и ученика. Личность — цель образовательной системы	Необходимость постоянного самовоспитания педагога. Значительные усилия по выявлению ценностного компонента содержания образования. Неявная проработанность этапов и компонентов технологий

Таблица 4

Методики и технологии обучения математике на основе активизации и интенсификации учебной деятельности

Название	Особенности	Преимущества	Недостатки
Игровые методики и технологии	Приоритет — воссоздание и усвоение общественного опыта. Игра способствует развитию психических функций, саморегуляции, социализации учеников	Вариативность игр по дидактическим функциям, организационной структуре, возрастным особенностям участников, содержанию. Возможность использования на разных этапах учебного занятия, образовательного процесса	Системность использования наиболее обеспечена во внеурочной деятельности. Временные ограничения снижают эффект. Обязательная синхронизация содержания игр и других упражнений для эффективного освоения учебного содержания
Технология проблемного обучения	Приоритет — создание проблемных ситуаций, самостоятельный поиск учениками решения	Высокий уровень умственного развития учеников. Интерес к учению, прочные результаты	Значительные затраты времени. Низкий уровень управляемости познавательной деятельностью
Технология модерации	Приоритет — обеспечение интерактивного взаимодействия учеников в ходе образовательного процесса в результате применения широкого спектра интерактивных методов и средств обучения	Изменение роли учителя. Активизация субъектной позиции ученика, усиление результативности обучения, эмоционально-ценностное развитие ученика	Значительные затраты времени при подготовке и фасилитации деятельности учеников. Необходимость учета индивидуального восприятия информации
Технология проектного обучения	Приоритет — индивидуальное развитие ученика, развитие мышления в деятельности, имеющей личностный смысл, универсальное использование знаний в разных ситуациях	Практическая направленность учебной деятельности, развитие самостоятельности школьников, формирование ключевых компетенций	Затраты времени на подготовку и реализацию проектов. Специфика оценки результатов проектной деятельности
Методика интенсивного обучения	Приоритет — теоретические знания, высокий уровень сложности, бесконфликтность, быстрое продвижение, многократность повторения, гласность	Использование опорных конспектов для самостоятельной работы, эффективное и объективное оценивание, высокий уровень эффективности	Особые усилия педагога для освоения и затраты времени на подготовку к уроку

ничений. Они могут также быть зафиксированы при анализе особенностей применения в обучении математике методик и технологий дидактического совершенствования и реконструирования содержания образования. К их числу принято относить модели «Экология и диалектика» (Л.В. Тарасов), «Диалог культур» (В.С. Библер, С.Ю. Курганов).

В контексте проводимого исследования наибольший интерес представляет технология *укрупнения дидактических единиц* (УДЕ) (П.М. Эрдниев). Приоритет этой технологии состоит в усвоении учениками в рамках одного урока так называемых «контрастных знаний» — взаимообратных задач с целью целостности математических знаний как важнейшего условия развития интеллекта школьников. Концептуально технология опирается на философию и психологию развития мышления, кибернетические постулаты и педагогику сотрудничества.

Особенности технологии УДЕ проявлены:

– в одновременном изучении взаимно обратных действий и операций: сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня и т.д.;

– в сравнении противоположных, родственных и аналогичных понятий: прямая и обратная теоремы, возрастание и убывание функций, уравнения и неравенства; периодические и непериодические функции, арифметическая и геометрическая прогрессии и проч.;

– в сопоставлении этапов работы, способов решения: графическое и аналитическое решение системы уравнений, координатное и геометрическое определение вектора и проч.

Обязательным условием результативности технологии УДЕ является особая структура содержания математического образования, позволяющая последовательно реализовать базовую концептуальную идею П.М. Эрдниева.

Таблица 5

Методики и технологии эффективного управления обучением математике

Название	Особенности	Преимущества	Недостатки
Технология программированного обучения	Приоритет — управление процессом обучения, использование средств ИКТ, применение в ходе реализации дистанционных технологий и электронного обучения	Индивидуализация обучения, самостоятельность, алгоритмичность учебной деятельности, возможность тщательной проработки содержания и объективность оценки результатов	Ограничения по содержанию учебного материала, снижение воспитательного воздействия на личность, затраты времени на подготовку качественных дидактических материалов
Технология перспективно-опережающего обучения	Приоритет — интенсификация образовательных процессов, использование опорных схем, комментированное управление временем урока	Оптимизация временных затрат на освоение наиболее сложного содержания, пропедевтика будущих затруднений	Применение в основной и старшей школе сложнее, чем в начальной школе, в связи с особенностями содержания образования
Технология уровневой дифференциации обучения	Приоритет — отказ от «селекции» школьников, обучение в разнородном коллективе на основе общеизвестного уровня образовательной подготовки	Индивидуализация обучения, дифференциация требований к освоению и процедуре проверки знаний, возможность каждого достигнуть высокий уровень результатов	Возникает неравенство школьников, элитарность и комплексы — крайние результаты внедрения как внутренней, так и внешней дифференциации
Технология индивидуализации обучения	Приоритет — индивидуализация обучения через взаимодействие учителя с каждым учеником, индивидуальная форма обучения через адаптацию содержания, средств и форм его освоения учеником	Охват всех учеников, вариативность средств индивидуализации (карточки, пары сменного состава, учебные планы, дистанционные технологии, портфели достижений и проч.)	Возможно снижение воспитательного эффекта образовательного процесса
Коллективный способ обучения	Приоритет — работа учеников в парах сменного состава, ориентация на индивидуальные особенности детей	Развитие самостоятельности, коммуникативных умений учеников, логического мышления, ассоциативных связей, прочное усвоение, ситуация успеха, непрерывная передача знаний	Результативность применения существенно зависит от содержания образования

К числу популярных в настоящее время методик и технологий обучения математике относятся те из них, что предполагают использование средств информационно-коммуникационных и телекоммуникационных технологий. Остановимся подробнее на представлении возможностей этих средств, опираясь на результаты проведенного исследования.

Общеизвестно, что ведущую роль в формировании и развитии ИКТ-компетентности обучающихся играет предметная область «Математика и информатика». Начиная с первого уровня общего образования школьники осваивают IT-средства графического представления цифровых моделей, учатся работать с ними, создают таблицы и строят графики, переводят информацию из одной формы ее представления в другую, схематично отображают математические отношения и зависимости, манипулируют с геометрическими объектами в электронном виде. Помимо освоения предметного содержания, тесно связанного с рассматриваемой компетентностью, ученики при наличии материально-технических условий осваивают 3D-принтеры и плоттеры, манипуляторы интерактивные планшеты и прочее современное оборудование.

Существенное влияние на эффективность предметного обучения оказывает учет учителем возрастных особенностей обучающихся и принципа преемственности в реализации ООП между уровнями общего образования. Если для дошкольников важно создать оптимальные условия для проживания фазы «преддействие», то для решения задач, связанных с развитием концентрации внимания, восприятия количества и поддержания познавательной мотивации средства ИКТ не так актуальны, как традиционные для этого периода педагогические инструменты. Важно обеспечить формирование представлений детей об элементарных правилах безопасного использования средств информатизации и общие представления о непрерывно обновляющейся технологической составляющей жизни семьи и общества. В начальной школе средства ИКТ становятся актуальным средством овладения младшими школьниками умением учиться, органично включаясь в число инструментов, используемых при формировании умений работать с информацией. Информатизация образовательного процесса в начальной школе может оказывать существенное влияние на развитие всех универсальных учебных действий обучающихся и личностное становление учеников.

В основной школе большое значение для развития личности учеников имеет продуктивная групповая и коллективная работа, самостоятельный выбор проектной и исследовательской деятельности. В связи с этим целесообразно обеспечить продуктивное использование средств информатизации для самостоятельной образовательной деятельности в целостном образовательном процессе с целью решения практически-ориентированных образовательных задач. Соответственно, на уровне среднего общего образования необходимо учитывать ориентированность обучающихся на профессиональное определение и применять средства ИКТ для расширения образовательного пространства.

Реализация индивидуальных образовательных траекторий, решение компетентностных образовательных задач, профессиональные пробы, участие в сетевых проектах, получение внешней экспертной оценки качества образовательных достижений в условиях информатизации образовательного процесса и в широком контексте информатизации жизни общества объективно обусловлено важнейшими потребностями развития личности в этот возрастной период.

Следует отметить, что актуальной в обучении математике является интеграция методик и технологий, включая ИКТ в качестве инструмента, усиливающего эффективность их применения. Например, интерактивные доски, комплекты системы голосования SmartSenteo, документ-камеры, web-камеры, цифровые лаборатории PASCO, ноутбуки могут успешно применяться в ходе организации решения школьниками проектных задач на учебном занятии (А.В. Молокова). Концептуальный замысел базируется на идеях философии прагматизма (Д. Дьюи), воплощенных в методе проектов (У.Х. Килпатрик), которые спустя столетие трансформируются в компетентностно-ориентированную парадигму образовательного процесса, ориентированного на развитие умений решения школьниками открытого списка нестандартных практически-ориентированных задач (А.Г. Асмолов и др.). Существенно, что генезис понятия «проектная задача» определяется логикой развития представлений о проекте — от замысла или плана к пониманию того, что это целенаправленное управление ограниченной во времени деятельностью по решению конкретной значимой для проектировщика задачи, результаты которой позитивно меняют исходную ситуацию (К.Н. Поливанова, А.Б. Воронцов и др.). Существенно, что решение проектных задач реализуется через систему заданий, позволяющих обеспечить продуктивность и групповой характер деятельности школьников, обеспечивает развитие рефлексивных и коммуникативных умений, целеполагание, планирование и моделирование, инициативностьиответственность(А.Б.Воронцов, В.М. Заславский, С.В. Егоркина и др.).

Решение проектной задачи на учебном занятии начинается с предъявления школьникам учебной ситуации, анализ которой позволит им выделить проблему, требующую решения и мотивирующую к дальнейшим совместным действиям. Наиболее распространенным вариантом является поступившая извне просьба о помощи. Это может быть:

– обращение сверстников или младших учеников, нуждающихся в разъяснении сложной учебной задачи;

– вопрос жителей другого города или страны, собирающихся в путешествие, о расходах на ознакомление с достопримечательностями населенного пункта, где находится школа;

– предложение помочь сделать выбор в пользу одной из возможных стратегий в организации какого-либо события, проведения ремонта, благоустройства территории, приобретения товаров, услуг и проч.

Другой эффективный прием мотивации к решению проектной задачи опирается на реально существующую необходимость подготовки класса к какому-либо значимому событию, касающемуся всех обучающихся. Например, предстоящая процедура контроля знаний, конкурсы различного уровня, общешкольные праздники, интеллектуальные соревнования, сетевые проекты, освоение дополнительных образовательных программ и др. После предъявления ситуации учителю необходимо организовать обсуждение детьми выделяемой ими проблемы для понимания и принятия цели проектной задачи. Это достаточно сложный для педагогов процесс, поскольку в допрофессиональном опыте организации обучения функция целеполагания традиционно оставалась за учителем. Дать школьникам возможность определить ценность дальнейших действий для решения выявленной ими проблемы не являлось ранее актуальной педагогической задачей.

В зависимости от того, какие и в каком количестве варианты решения проблемы будут выбраны школьниками, учитель организует дальнейшую работу по одному из вариантов обучения в сотрудничестве или выбирает наиболее приемлемые вариативные формы, методы и средства для обеспечения продуктивной совместной деятельности детей.

Для того чтобы в ограниченное время учебного занятия последующая деятельность школьников была продуктивной, учителю важно обсудить с учениками критерии оценки конечного продукта решения задачи и обеспечить их всем необходимым инструментарием и материалами для самостоятельной работы. В ходе ее выполнения школьникам могут потребоваться дополнительные источники информации, консультации педагога, помощь внешних экспертов и проч. В связи с этим при проектировании учебного занятия учителю необходимо учесть все возможные отклонения от предполагаемого плана, что часто вызывает затруднения.

Определенные трудности связаны также с организацией предъявления и оценки учениками продукта решения проектной задачи. Важно отметить, что результат решения проектной задачи отличается от продукта полноценной проектной деятельности масштабами самостоятельно сделанного детьми и тщательностью изготовления только в том случае, если система заданий и инструментарий недостаточно продуманы и некачественно подготовлены. И в том и в другом случае ученики могут создать буклет, книгу, газету, плакат, памятку, инструкцию, сувенир, модель и многое другое. Предъявление результата может происходить последовательно каждой группой всем обучающимся, мотивированным к его восприятию (например, через заполнение обобщающей таблицы, создание единого целого из созданных группами частей, оценивание учителем экспертной работы учеников и проч.). Актуальным является прием обмена созданными продуктами решения проектной задачи и их предъявления и одновременной оценки школьниками из других групп. Существенное значение имеет и организация взаимной оценки совместной деятельности, вклада каждого ученика в общий результат.

Процесс решения проектной задачи в аспекте выполнения детьми тех действий, которые обеспечивают развитие ключевых метапредметных компетенций в условиях применения средств ИКТ, представлен в таблице 6.

Апробация разработанной технологии показала ее высокую результативность и одновременно позволила выявить методические сложности, требующие повышения квалификации учителей математики. Среди них: затруднения в выборе проблемной ситуации и организации мотивационно-целевого этапа; сложности в организации совместной деятельности школьников по выполнению необходимых для решения проектной задачи системы заданий (шум, выполнение работы лишь академически успешными учениками, несоблюдение временного регламента и проч.), нехватка времени на развернутое представление результата решения проектной задачи, контрольно-оценочные процедуры.

Таким образом, проектирование и реализация учебных занятий по решению проектных задач в обучении математике:

– в начальной школе есть прообраз проектной деятельности и осуществляется с целью формирования проектных умений (п. 11 ФГОС НОО);

– в основной школе является дополнением к полноценной проектной деятельности, организуемой во внеурочной и внешкольной занятости школьников для формирования подлежащих итоговому оцениванию компетенций (п. 12 ФГОС ООО);

– в средней школе — это естественный формат организации учебной работы в соответствии с проектированием образовательной траектории и профессиональным самоопределением личности (п. 6 ФГОС СОО).


Е.С. Полат


П.М. Эрдниев


В.В. Фирсов


Т.И. Шамова


В.Ф. Шаталов

Таблица 6

Процесс поэтапного формирования УУД в ходе решения проектной задачи на учебном занятии

Этапы учебного занятия	Формируемые универсальные учебные действия	Возможное применение средств ИКТ
Мотивационно-целевой	*Познавательные:* ученики актуализируют личный опыт, имеющиеся знания для выделения проблемы из предложенной учителем учебной ситуации и перевода ее в проектную задачу. *Коммуникативные:* участвуют в обсуждении учебной ситуации, высказывая предложения, аргументируя свой выбор, договариваясь о дальнейших действиях по плану, о критериях оценки конечного продукта. *Регулятивные:* принимают цель, планируют ее достижение, оценивают и выбирают оптимальный вариант конечного продукта. *Личностные:* определяют личное отношение к предложенной ситуации, значимость решаемой проблемы, принятие общей цели	Видеосюжеты и анимация; результаты Googl-опросов и слайд-шоу; результаты анализа контрольных работ, представленные в графическом виде; таблицы и диаграммы, содержащие статистические данные и созданные с помощью Exel
Операционно-деятельностный	*Познавательные:* ученики активно работают с различными источниками информации, выполняют необходимые логические операции, моделируют и конструируют, выполняя задания, подготовленные учителем. *Коммуникативные:* сотрудничают в создании общего продукта; обсуждают его особенности и соответствие критериям оценки; формулируют вопросы учителю при возникновении затруднений. *Регулятивные:* удерживают цель; соблюдают инструкцию; контролируют свои действия, соотнося результаты с образом конечного продукта, осуществляют взаимоконтроль. *Личностные:* вносят предложения по улучшению качества конечного продукта, переживают за общий результат, оказывают помощь друг другу	Персональные компьютеры, планшеты и web-камеры для получения и обработки информации, создания электронной презентации, трейлера, электронного плаката и проч.; электронные микроскопы, датчики и другие средства обработки в цифровой форме данных естественно-научного исследования и эксперимента; робототехника для моделирования и конструирования
Контрольно-оценочный	Познавательные: ученики обобщают сделанную работу, делают выводы, прогнозируют дальнейшее использование полученного результата. *Коммуникативные*: представляют продукт решения проектной задачи, аргументируют результаты самооценки, задают вопросы другим ученикам, высказывают оценочные суждения. *Регулятивные*: оценивают созданный продукт и процесс своей деятельности, свой вклад в работу группы, анализируют личную и коллективную работу в части возникших трудностей и достижений. *Личностные*: стремятся к объективности в оценке, планируют дальнейшее изучение возможных вариантов решения проблемы и применение полученных результатов с учетом возможных социальных благ	Проекционная аппаратура, в том числе документ-камеры и интерактивные доски / столы / пол для представления продукта решения проектной задачи; система голосования для оценки и рефлексии процесса и результатов совместной деятельности

Р.Г. Хазанкин

С.Т. Шацкий

А.Г. Асмолов

К.Н. Поливанова

В.В. Гузеев

М. НИКИФОРОВА,
г. Москва

ТЕХНОЛОГИЯ УЧЕБНЫХ ЦИКЛОВ

ЦИКЛ УРОКОВ

Тему «Умножение десятичных дробей» мы с пятиклассниками проходили в конце ноября в рамках реализации программы опережающего обучения. К этому моменту мы повторили арифметические действия с натуральными числами, разобрались с понятием десятичная дробь и научились сравнивать, складывать и вычитать десятичные дроби. Также мы научились умножать и делить десятичную дробь на натуральное число, в том числе на 10, 100, 1000 и т.д. Теперь перед нами стояла задача освоить умножение десятичной дроби на десятичную дробь, в том числе умножение на 0,1, 0,01, 0,001 и т.д.

Обучение я веду по технологии учебных циклов, поэтому ребята работают над этой темой пять уроков. Опишу, как обычно организованы уроки и какие результаты показали учащиеся.

Первый урок

Урок изложения нового материала начинается диктантом:

1. Разделите 16,32 на 4.
2. Найдите частное 85,47 и 10.
3. Разделите 438,71 на 100.
4. Первый множитель увеличили вдвое, а второй множитель увеличили втрое. Как изменилось произведение?
5. Во сколько раз произведение $0{,}2 \cdot 0{,}03$ меньше, чем $2 \cdot 3$?

Первые три задания диктанта проверяют и актуализируют знания прошедшего учебного цикла. Задания 4 и 5 позволили начать разговор об умножении десятичных дробей, то есть ввели нас в новую тему.

После написания диктанта ученики переносят ответы в тетрадь, а листочки с решениями сдают; я на доске записываю правильные ответы и провожу голосование, какие задания диктанта требуют разъяснения и обсуждения. Мы обсуждаем эти задания, попутно повторяем переместительный закон умножения и выясняем, что умножение натуральных чисел отличается от умножения десятичных дробей в кратное десяти число раз.

Итог: «5» — 8, «4» — 10, «3» — 3, «2» — 2. Больше всего ошибок было в пятом вопросе.

После этого мы знакомимся с новой темой по пособию, разработанному Г. Левитасом, О. Новиковой и Т. Хлыстовой. В пособии материал представлен в виде текста с пропусками отдельных слов. Один из учеников читает текст вслух, остальные следят и заполняют пробелы в тексте. Если надо произвести вычисления, то я выполняю эти вычисления на доске с пояснениями.

После прочтения текста я записываю на доске конспект нового материала, а ученики копируют его в свои тетради.

Конспект

Умножение десятичных дробей

$3{,}7 \cdot 0{,}27 = ?$

$\times$ на 10 $\times$ на 100

$37 \cdot 27 = 999$

: на 1000

$3{,}7 \cdot 0{,}27 = 0{,}999$

Значит:

$3{,}\underbrace{\underline{7}}_{1} \cdot 0{,}\underbrace{\underline{27}}_{2} = 0{,}\underbrace{\underline{999}}_{3}$

Пример:

$628{,}745 \cdot 0{,}\underbrace{\underline{01}}_{2} = 6{,}28745$

Далее мы договариваемся с двумя учениками, что завтра один из них будет отвечать этот конспект у доски, и приступаем к выполнению заданий в рабочей тетради (авторы *Арутюнян Е.Б. и Левитас Г.Г.*).

Домашнее задание: выучить конспект и написать его на листочке, закончить выполнение заданий в рабочей тетради.

Второй урок

Второй урок — урок самостоятельной работы — начинается еще на перемене: перед тем как зайти в класс, ученики сдают листочки с конспектами — домашнее задание. Это «входной билет» на урок.

Урок начинается с воспроизведения конспекта. Один из учеников, мы с ним договаривались на прошлом уроке, пишет конспект на доске так, чтобы его никто не видел. Остальные воссоздают конспект на листочках по памяти. После того как работы сданы, ученик у доски рассказывает правила умножения десятичных дробей, опираясь на свой конспект, ребята задают ему уточняющие вопросы. После этого мы в тетрадях записываем тему урока: «Подготовка к самостоятельной работе».

Каждая письменная работа, будь то самостоятельная, проверочная или контрольная, у меня состоит из шести заданий. Первые пять на пятерку, а шестое — задание со звездочкой — на дополнительную отметку. Чаще всего это задача на сообразительность или задача повышенной трудности по текущей теме. На уроке самостоятельной работы перед ее началом я на доске разбираю четыре задания. В самостоятельной работе, которую получат дети, будут аналогичные.

На данном уроке подготовка к самостоятельной работе состояла из решения следующих заданий.

1. $0{,}2 \cdot 0{,}3$. **2.** $21{,}95 \cdot 0{,}005$.
3. $8{,}34 \cdot 0{,}1$. **4.** $4{,}7 \cdot 0{,}43$.

Мы решаем эти задания с комментариями на доске. Все записи ученики переносят в тетрадь. Задания 1 и 3 были решены в строчку, а задания 2 и 4 — и в строчку, и в столбик.

Самостоятельная работа дается в двух вариантах. Первые четыре задания, аналогичные разобранным, требуют оформления «как на доске». Следующие два:

5. Длина пола 6,35 м, а его ширина 4,82 м. Найдите площадь пола.

6*. Какую цифру (одну и ту же) можно поставить вместо звездочки, чтобы было верно:
а) $0{,}5* = 0{,}*5$; б) $0{,}*3 > 0{,}5*$;
в) $6{,}8*1 < 6{,}82*$.

Итог: «5/5» — 3, «5» — 7, «4» — 5, «3» — 4, «2» — 3.

Самым сложным оказалось задание 2 (верных решений 64%), лучше всего справились с заданиями 3 и 1 (95% и 86% верно решивших соответственно), хуже всего выполнили задание 5 (41%).

Домашнее задание: закончить самостоятельную работу. Ученикам, справившимся с нею, решать задачи повышенной трудности, которые можно взять из учебника либо из поурочных разработок к нему.

Третий и четвертый уроки

Следующие два урока мы решаем примеры и задачи на умножение десятичных дробей. Оба урока начинаются с математического диктанта. Диктанты третьего и четвертого уроков цикла имеют сквозную тематику на протяжении всего учебного года. В основном они носят пропедевтический характер. Приведу пример такого диктанта.

1. Один процент длины веревки равен 2 м. Чему равна длина веревки?

2. Раскройте скобки: $(m + x) \cdot 3a$

3. Выполните действие: $-17 - 3$. Поясняю: на улице было -17 °C, а потом похолодало еще на 3 °C. Какой стала температура?

4. Составьте и решите уравнение по условию: $3x$ на 8 больше, чем x.

5. Начертите числовую прямую и отметьте на ней числа 0,5 и 0,25. Какое из них левее? Какое меньше?

После написания диктанта решение каждого задания разбирается на доске.

Для дальнейшей работы на этих уроках предложены номера из УМК под редакцией Н.Я. Виленкина:

– 3-й урок: № 1391, 1396, 1397;

– 4-й урок: № 1406(а), 1407(а), 1408–1410.

Для решения этих заданий использовалась технология работы в парах. Каждый ученик за урок получил отметку: быстрых и сильных учеников оценивала я, а они проверяли работы своих одноклассников.

Домашнее задание на каждом уроке: закончить решение задач урока. Желающим — решать задачи повышенной трудности.

Иногда на уроках решения задач я использую форму работы в группах по три человека. Один ученик в такой группе выступает в роли эксперта. Он может быть выбран по итогам самостоятельной работы на втором уроке. Работа эксперта состоит в том, чтобы помочь своим подопечным освоить тему. Он решает задания вместе с ними, объясняет и, при необходимости, оценивает их работу. Подопечные после урока оценивают работу эксперта. Учитель в таком случае может выступать как эксперт и работать со своей группой или быть консультантом. Такой вариант работы требует дополнительного времени на подготовку (подбор групп и экспертов), но дает возможность учащимся проявить себя и услышать объяснение темы от сверстника.

Пятый урок

На пятом, заключительном уроке цикла ученики пишут проверочную работу. Она дается в четырех вариантах и, как и самостоятельная, состоит из шести заданий.

1. Найдите произведение: $8{,}5 \cdot 1{,}04$.
2. Умножьте 0,8 на 0,92.
3. Найдите произведение чисел 37 и 0,0001.
4. Вычислите значение выражения
$$28{,}6 + 11{,}4 \cdot (6{,}565 + 3{,}405).$$
5. Длина школьного коридора 30,24 м, а ширина 5,12 м. Найдите его площадь в квадратных метрах.

6*. В семье живут бабушка, папа, мама и один трехлетний ребенок. На сколько лет моложе они были вместе четыре года тому назад?

Итог: «5/5» — 2, «5» — 5, «4» — 6, «3» — 4, «2» — 3.

Большинство учащихся усвоили тему «Умножение десятичных дробей». С теми, кто не освоил тему, дальнейшая работа идет на дополнительных занятиях с помощью карточек коррекции знаний (издательство «Илекса» и в книге: *Левитас Г.Г.* Математика, 5–6. Материалы для уроков.).

ТЕМА УРОКА: «РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, ИХ СИСТЕМ»

Л. БАЯНКИНА,
г. Барнаул

Хочу поделиться опытом применения технологии коллективного способа в обучении математике.
Наиболее востребованной в моей практике является методика взаимообмена заданиями.
Методика взаимообмена заданиями была разработана профессором Красноярского университета М.А. Мкртчяном. Данная методика решает задачу самостоятельного освоения учащимися способов предметных действий.

Организация работы

Каждый ученик получает карточку с определенным цветовым сигналом (цветовые сигналы могут повторяться). На школьной доске показаны маршруты обмена карточками и дан нумерованный список учащихся.

Каждая карточка содержит два однотипных задания (количество заданий может быть больше, это зависит от целей и продолжительности учебного занятия). Карточки с различными цветовыми сигналами содержат задания на применение различных способов решения уравнений, неравенств и их систем.

Алгоритм работы

1. Выполните задание 1. Если возникли затруднения, то проконсультируйтесь с учителем или консультантом.

Замечание 1. Консультантом может быть ученик этого же класса, освоивший способы решения уравнений и неравенств; консультация может быть также получена учеником через карточку-«консультанта» соответствующего цветового сигнала.

2. Выполните самостоятельно задание 2, опираясь на решение задания 1.

3. Закончив работу, отчитайтесь перед учителем или консультантом (*первичный контроль*).

4. Отыщите партнера согласно цветовому сигналу карточки и маршруту, указанному на доске, и поменяйтесь с ним карточками.

5. Работайте над заданием 1 новой карточки, консультируйтесь с партнером по обмену, если это необходимо.

6. Выполните задание 2 новой карточки и организуйте взаимоконтроль с партнером по обмену (*промежуточный контроль*).

7. Алгоритм работы повторяется с 4 по 6 пункты. Работа закончена, если выполнены задания карточек всех цветов.

Выходной контроль

Первичный и промежуточный контроль необходимы для выявления и устранения ошибок, недочетов, «непониманий», а выходной (проверка тетрадей, «защита» решений у доски, письменная работа по аналогичным заданиям) покажет качество освоения учебного материала.

Замечание 2. Если один из партнеров еще не готов к консультированию, взаимоконтролю или обмену, то другому ученику предоставляется возможность выполнить дополнительные задания согласно цветовому сигналу карточки.

Дополнительные задания предлагаются в двух вариантах — для учащихся разных уровней подготовленности. Дополнительное задание первого варианта задает обязательный уровень подготовки. Второй вариант состоит из более сложных заданий. Однако выполнение этих заданий предполагает лишь владение программным материалом.

Замечание 3. Учащиеся свободны в выборе варианта дополнительных заданий. Они также имеют право переходить из одного варианта в другой, это значит, что у них есть возможность изменить пакет дополнительных заданий и в случае, когда не могут справиться, и в случае, когда чувствуют свой потенциал.

Для отметки в тетрадях о выполнении заданий используются альтернативные оценки:

«+» — сделано верно;
«±» — решено верно с замечаниями;
«–» — решено неверно.

Использование такой технологии обучения в течение нескольких лет позволяет сделать следующие выводы:

– создаются благоприятные условия для комфортного учения каждому обучающемуся, ребята чувствуют себя раскованно, работают самостоятельно в индивидуальном темпе, в меру своих возможностей;

– происходит регулярное общение учеников друг с другом, при этом значительно активизируется мыслительная и речевая деятельность учащихся, каждый имеет возможность задавать вопросы и отвечать на них, объяснять, доказывать, подсказывать, проверять, оценивать, исправлять ошибки в момент их появления, а также получать консультации у учителя и одноклассников;

– главным становится чувство ответственности перед партнером, группой, поэтому ребята стараются не подвести друг друга;

– у слабоуспевающих учащихся появляются успехи в учебе, так как в результате многократного повторения, взаимопомощи восполняются пробелы в знаниях, развивается упорство и настойчивость в работе.

Вышеприведенный подход к проблеме развития у школьников самостоятельности, коллективизма, умения управлять учебно-познавательной деятельностью не единственный, но он позволяет ребятам учиться формулировать и задавать вопросы, математически грамотно выражать свои мысли, слушать друг друга, контролировать и оценивать себя и других.

Литература

1. *Дьяченко В.К.* Сотрудничество в обучении. — М.: Просвещение, 1991. 2. *Мкртчян М.А.* Взаимообмен заданиями // Математика в школе, 1996, № 6. 3. *Гончарова М.А.*, *Ковалева В.В.* Предметные педагогические технологии: Методические рекомендации для студентов математического факультета. — Барнаул: БГПУ, 1997. 4. *Гончарова М.А.*, *Решетникова Н.В.* Образовательные технологии в школьном обучении математике: учебное пособие. — Р/Д.: Феникс, 2016.

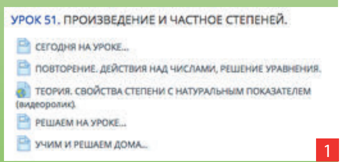
Маршрут обмена

I обмен		II обмен		III обмен		IV обмен	
1 ↔ 4	7 ↔ 10	1 ↔ 7	4 ↔ 10	1 ↔ 5	7 ↔ 11	1 ↔ 8	5 ↔ 10
2 ↔ 5	8 ↔ 11	2 ↔ 8	5 ↔ 11	2 ↔ 6	8 ↔ 12	2 ↔ 9	6 ↔ 11
3 ↔ 6	9 ↔ 12	3 ↔ 9	6 ↔ 12	3 ↔ 4	9 ↔ 10	3 ↔ 7	4 ↔ 12

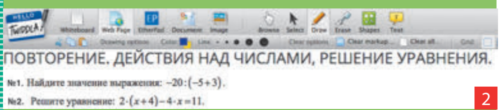
Замечание 4. За числами 1, 2, 3, ... закреплены учащиеся из нумерованного списка, представленного на школьной доске. Если в классе 24 человека, то таких списков может быть два.

А. НОСКОВ,
г. Киров

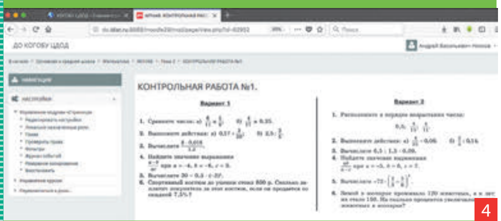
ДИСТАНЦИОННОЕ ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ



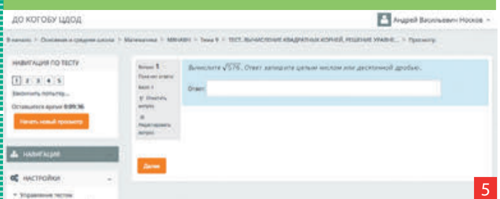
1



2



4


5

■ В 2009 году в Российской Федерации началась реализация федерального проекта «Развитие дистанционного образования для детей-инвалидов». В рамках этого проекта в 2009 году было создано Кировское областное государственное общеобразовательное бюджетное учреждение «Центр дистанционного образования детей».

«Центр дистанционного образования детей» — это школа для детей с особыми образовательными потребностями, нуждающихся в обучении на дому по индивидуальному учебному плану. Наша школа обладает хорошими кадровыми ресурсами и хорошей материально-технической базой, которые позволяют успешно обучать дистанционно детей с различными ограничениями здоровья.

Для меня основной целью педагогической деятельности является создание индивидуальных условий обучения математике детей с различными ограниченными возможностями здоровья на основе применения дистанционных образовательных технологий.

Дистанционные образовательные технологии позволяют на определенных этапах урока использовать различные технические средства обучения.

Одним из инструментов обучения детей нашей школы является система дистанционного обучения «Виртуальный класс» на базе *Moodle*. Каждый учитель-предметник имеет возможность разрабатывать свои собственные виртуальные курсы по своему предмету и использовать их для более качественного обучения детей на своих уроках. Мной разработано несколько виртуальных курсов по математике для учащихся 7–9-х классов.

Хочу поделиться опытом использования виртуального курса для обучения учащихся с ограниченными возможностями здоровья.

Уроки проходят дистанционно через *Skype*, время урока — 45 минут. Количество уроков курса равно их количеству в рабочей программе. Тема каждого урока в виртуальном классе соответствует теме календарно-тематического планирования. Приведу пример структуры одного из уроков. 1

В рубрике «Сегодня на уроке...» идет целеполагание урока. Ученик, щелкнув по названию рубрики и открыв у себя веб-страницу, может прочитать о том, что он будет на этом уроке делать, что повторит, что нового узнает. Обязательно в содержание каждого урока включаю вопросы по ранее изученным темам. Формы для проведения повторения применяю различные, например, тесты, задания на соответствия, примеры и т.д.

На уроках использую виртуальную доску. 2 На доску заранее «вывешиваю» задания на повторение, закрепление изученного материала (рубрика «Решаем на уроке...»). Те ученики, кто может писать, пишут у себя на экране с помощью графического планшета, ход выполнения задания виден и мне, и ученику.

Если у ученика нет возможности записать решение самому, то он комментирует ход решения, отвечает на мои вопросы.

При изучении нового материала кстати оказываются различные мультимедийные материалы (презентации, видеофрагменты, интерактивные плакаты), которые прикрепляю к уроку в виде гиперссылок на файлы, выложенные на облачные сервисы. Я использую облачный сервис *MicrosoftOneDrive*. У учащихся появляется возможность при необходимости посмотреть учебный материал в любое время без загрузки его на жесткий диск компьютера. Это несомненный плюс.

При создании интерактивных материалов к уроку использую кросс-платформенную бесплатную динамическую математическую программу *GeoGebra*. Например, с помощью файлов, созданных в этой программе, у меня появляется возможность наглядно показать учащимся решение той или иной задачи, а у учеников появляется шанс дома самим поэкспериментировать, провести исследование. Программа *GeoGebra* имеет ряд преимуществ. Во-первых, она может быть установлена на несколько операционных систем, во-вторых, позволяет конвектировать файлы, созданные в ней, в веб-страницы, что позволяет просматривать интерактивные материалы без установки *GeoGebra* на компьютер.

Приведу пример своей разработки. При рассмотрении вопроса о зависимости количества корней уравнения $x^2 = a$ использую интерактивный динамический чертеж: двигая ползунок, меняем значение параметра a, от чего зависит положение прямой $y = a$, а вслед за ней меняются и числовые значения переменных (ссылка на чертеж: geogebra.org/m/GUURwvJy). 3

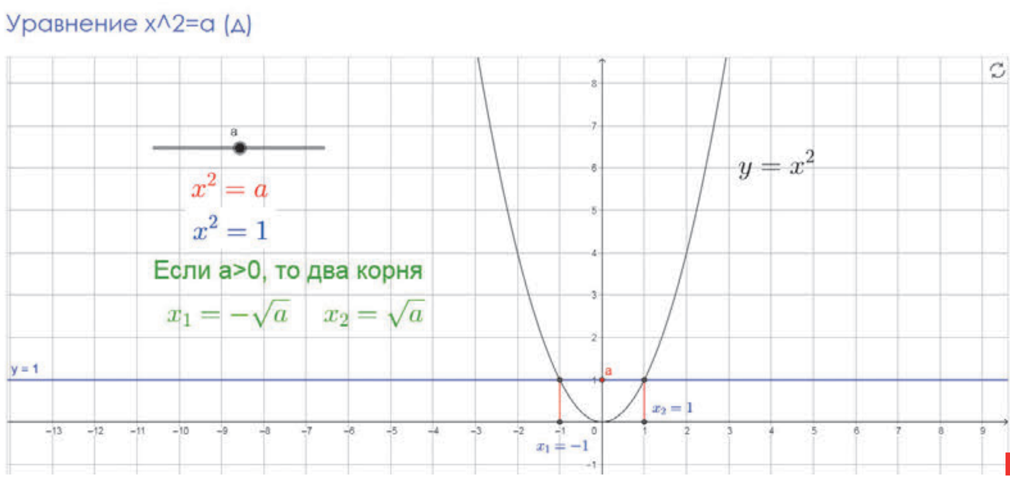
Использование таких динамических интерактивных чертежей подогревает познавательный интерес учащихся, дает им возможность самим выдвигать гипотезы, делать выводы.

Проверяя качество знаний учащихся по отдельным вопросам, использую различные формы контроля — проверочные, самостоятельные, контрольные работы, тесты. Например, материал контрольной работы прикрепляю к веб-странице. 4 Ученик на уроке открывает эту страницу, выполняет в течение урока задания, а по окончании урока сканирует свои записи и отправляет мне на проверку. Проверка записей решений дает возможность проанализировать и уровень знаний ученика.

Очень удобно для проверки качества знаний учащегося использовать многовариантные тесты, созданные в системе дистанционного обучения. 5 Удобство заключается в том, что результат выполнения теста виден сразу и ученику, и мне, что дает возможность, используя интерактивную доску, провести работу над ошибками, устранив пробел в знаниях ученика. Но при выполнении теста не виден ход решения задачи, поэтому прошу учеников высылать мне копии решений тестовых заданий.

Конечно же, использование на уроках математики при обучении детей с ограниченными возможностями здоровья ресурсов системы дистанционного обучения на базе *Moodle* требует определенных знаний и умений от самого учителя, толкает его к собственному развитию, к творческому подходу к своей работе, к самосовершенствованию.

Двигаясь в этом направлении, создавая свой курс, труды учителя не будут напрасны. Бывают и такие обстоятельства, что в силу каких-то причин ученик не может выйти на занятие в *Skype* по расписанию, или ему нужно рассмотреть новый материал, или повторить ранее изученное, или родители захотели вспомнить то, что изучали. Вот здесь и необходим виртуальный курс в системе дистанционного обучения.



3

Фрагмент презентации опубликован в авторской редакции

Урок ко Дню Победы. 5 класс

О. ВЛАДЫКИНА,
Н. ГРАЧЁВА,
г. Подольск, Московская обл.

«НИКТО НЕ ЗАБЫТ И НИЧТО НЕ ЗАБЫТО»

Цель: формировать умение применять знания, связанные с выполнением действий с десятичными дробями и процентами.

Задачи:

предметные: учиться применять приобретенные знания, умения, навыки для решения практических задач; работать с информацией, представленной в таблицах;

метапредметные: научиться выявлять особенности (качества, признаки) разных объектов в процессе их рассмотрения;

личностные: способствовать формированию у учащихся уважения к историческому прошлому своего народа на примере подвигов, совершенных в годы Великой Отечественной войны.

Оборудование: музыкальные произведения — «Реквием» В.А. Моцарта; «Прощание славянки» В. Агапкина; презентация; таблица «Основные виды танков СССР времен Великой Отечественной войны» (*на каждую парту*); карточки с заданиями; карточки «Подвиг героя».

ХОД УРОКА

Организационный этап

(*Звучит «Реквием» В.А. Моцарта, 10 с.*)

Учитель. Здравствуйте, ребята! Сегодня у нас необычный урок, тема его: «Никто не забыт и ничто не забыто». Эти слова принадлежат русской советской поэтессе Ольге Берггольц, которая в годы Великой Отечественной войны, оставаясь в осажденном Ленинграде, работала на радио, почти ежедневно обращаясь в эфире к жителям города. 2

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

Актуализация знаний

Учитель. В мае 1945 года закончилась Великая Отечественная война, самая страшная и опустошительная в истории человечества. В то же время это одна из самых героических страниц истории нашей страны и нашего народа.

Ребята, а вы знаете почему?

(*Выслушать ответы учащихся.*)

В эти страшные для нашего народа годы было тяжело находящимся на линии фронта. Но и в глубоком тылу люди испытывали трудности и лишения; нам сейчас, в мирное время, сложно представить что это были за лишения. Но жизнь и борьба продолжались, несмотря ни на что.

В условиях блокадного Ленинграда дети старались посещать школу. Конечно, обучение проходило по сокращенному учебному плану, в который были включены только основные предметы.

«К урокам готовлюсь по-новому, — писала осенью 1941 года в своем дневнике учительница истории 239-й школы Ксения Владимировна Ползикова. — Ничего лишнего, скупой ясный рассказ. Детям трудно готовить уроки дома, значит, нужно помочь им в классе. Не ведем никаких записей в тетрадях: это тяжело. Но рассказывать надо интересно. Ох, как это надо! У детей столько тяжелого на душе, столько тревог, что слушать тусклую речь не будут. И показать им, как тебе трудно, тоже нельзя». 3

Учиться в жестоких условиях блокадной зимы было подвигом. Учителя и ученики сами добывали топливо, возили на санках воду, следили за чистотой в классах. На переменках стояла непривычная тишина, дети перестали бегать и шуметь, их бледные и изможденные лица говорили о тяжелых переживаниях. Учеников, продолжавших заниматься в суровую зиму 1941–1942 года, с уважением называли «зимовщиками». 4

У нас с вами, современных людей, первыми книжками в школе были Азбука и Букварь. А ведь осваивать азы чтения можно и по газетным заголовкам? И именно так многие наши прабабушки и прадедушки учились читать.

Перенесемся в прошлое и узнаем, какие заголовки можно было увидеть на страницах газет в 1941–1945 годах: «Наш лозунг — победа!»; «Что ты сделал для фронта?»; «Все женщины и подростки — в ряды бойцов трудового фронта»; «В военное время работать по-военному»; «Все силы на разгром врага!»; «Буду работать за двоих». 5

А как же дело обстояло тогда в математике? Думается, что школьники того военного времени решали не только привычные нам задачи, но и задачи с содержанием, реальным на тот момент.

Сегодня на уроке мы с вами попробуем применить свои знания и умения к решению задач с военным содержанием, в основу их условий положены события, происходившие в нашей стране в годы Великой Отечественной войны.

Решение задач

Задача 1. С 1 октября 1941 года в блокадном Ленинграде норма хлеба для служащих, иждивенцев и детей до 12 лет составляла 200 г в сутки. Ввиду продолжающейся фашистской блокады и истощения продовольственных запасов в осажденном городе к 20 ноября норма хлеба была снижена еще на 37,5%. Сколько граммов хлеба стал получать ребенок до 12 лет с 20 ноября 1941 года по продовольственной карточке? 6

[125 г хлеба в сутки.]

Возможные вопросы:

– Что в этой задаче необычного для вас?

[В задаче встречается много числовых данных, но не все они используются при решении.]

– С какими числовыми данными связаны проценты в данной задаче?

Учитель. В блокадном Ленинграде нормы отпуска продуктов по продовольственным карточкам были минимальными в период с 20 ноября по 25 декабря 1941 года: рабочие получали 250 г хлеба в сутки, служащие, иждивенцы и дети до 12 лет — всего лишь 125 г хлеба в сутки. В ноябре 1941 года в Ленинграде начался голод. «Дорога жизни», проложенная по льду Ладожского озера, позволила частично обеспечить продовольствием жителей города и бойцов, обороняющих Ленинград. В условиях блокады ленинградцы старались не только выжить, но и помочь армии: заводы продолжали работать и выпускать военную продукцию и в таких невыносимо тяжелых условиях, например, «Кировский завод», находившийся почти на линии фронта, собирал и ремонтировал танки и другую бронетехнику в течение всей блокады.

Ребята, у каждого из вас на парте есть таблица «Основные виды танков СССР времен Великой Отечественной войны», в ней представлено несколько видов советских танков.

Основные виды танков СССР времен Великой Отечественной войны

Тип	Т-26, легкий танк	Т-34, средний танк	КВ-85, тяжелый танк	ИС-2, тяжелый танк
Изображение				
Боевая масса, т	10,25	30,9	46	46
Лобовая броня, мм	15	45	75	120
Максимальная скорость, км/ч	30	54	42	37
Запас хода, км	200	300	330	240
Экипаж, чел.	3	4	4	4
Вооружение	Пушка 45 мм, пулемет 7,62 мм	Пушка 76 мм, два пулемета 7,62 мм	Пушка 85 мм, три пулемета 7,62 мм	Пушка 122 мм, три пулемета 7,62 мм, пулемет 12,7 мм
Примечания	Наиболее интенсивно танк использовался в ходе Финской войны в 1940 году, а также в 1941 году во время Битвы за Москву	Благодаря своим боевым качествам Т-34 был признан рядом специалистов лучшим средним танком Великой Отечественной войны	Эта боевая машина была разработана в связи с появлением у противника новых тяжелых танков «Тигр». Индекс 85 означает калибр основного вооружения машины	Танк зарекомендовал себя как средство качественного усиления частей и подразделений и прорыва хорошо укрепленных заградительных полос, а также штурма городов

Учитель. Используя данную таблицу, ответьте на *вопросы*.

– Какой танк имеет наибольший запас хода?

– Определите, у какого из представленных в таблице танков наибольшая максимальная скорость. Какое расстояние пройдет этот танк за 2,5 часа с данной скоростью?

– У каких танков, представленных в таблице, боевая масса одинаковая?

– Лобовая броня каких танков с уверенностью выдерживала попадание снаряда немецкой противотанковой пушки калибра 37 мм?

Работа в парах

Задача. С ремонтной базы одновременно к линии фронта выехали танки ИС-2 и КВ-85. Какое расстояние будет между ними через 3,7 часа, если они будут двигаться со своей максимальной скоростью? Что общего и в чем различие в вооружении данных танков?

Учитель. Мальчишки и девчонки 40-х годов были самыми обычными до тех пор, пока к ним в дом не постучалась война. На их хрупкие плечи легла тяжесть невзгод, бедствий, потерь и горя военных лет. И они не согнулись под этой тяжестью, стали сильнее духом, мужественнее и выносливее.

Юные герои большой войны сражались рядом со старшими — отцами, братьями, дедами; воевали повсюду: в небе, на море, в партизанских отрядах, на передовой линии фронта и в тылу. 9

Работа в парах по карточкам

Учитель. Предлагаю вспомнить их имена, выполнив следующие задания.

Выполнив задания правильно, вы в таблице ответа прочтете имена и фамилии юных героев.

Задание 1. Выполните действия, расположив ответы в порядке возрастания и вписав в ячейки таблицы соответствующие им буквы.

75,2 + 0,748 Н	0,64 – 0,392 О	11 · 19,42 К	15,3 : 34 Я	35,75 · 0,1 О	197 : 10000 З
0,257 + 11,37 М	53,8 – 4,917 Я	0,238 · 32 Е	2811,8 : 34 С	$1{,}6^2$ С	$0{,}9^3$ К
37,85 : 0,01 А	9,34 · 5,2 Ь	1,209 : 0,31 Д	42,396 : 0,001 Я	4,25 · 0,8 М	10 : 6,25 О

Ответ:

Задание 2. Расшифруйте имя юного героя Великой Отечественной войны, вписав в ячейки таблицы соответствующие указанным ответам буквы.

1,7 + 2,8 Е	9,2 – 3,4 В	3,5 · 18 Н	104,5 : 38 И	8,6 · 4,35 О	35,27 : 0,1 К
3,6 + 9 Л	10,3 – 8,17 О	0,486 · 15 Л	63,7 : 100 Г	0,0204 : 0,12 Я	

Ответ:

7,29	4,5	63	0,17	0,637	37,41	12,6	2,75	352,7	2,13	5,8

Задание 3. Выполните действия, расположив ответы в порядке убывания и вписав в ячейки таблицы соответствующие им буквы. Кто это?

63,5 + 0,635 Н	0,35 – 0,287 В	0,43 · 27 Т	927,36 : 48 О	3,8 · 6,95 П	185,6 : 0,64 З
13 + 4,2 Р	64,3 – 8,516 А	7 · 18,36 И	165 · 0,001 О	0,24 · 0,25 А	16,45 : 4,7 Н

Ответ:

Задание 4. Расшифруйте имя юного героя Великой Отечественной войны, вписав в ячейки таблицы соответствующие указанным ответам буквы.

0,9 + 3,2 Л	8,6 – 7,9 С	2,07 · 37 А	822,8 : 85 К	0,32 · 0,25 Н	35,27 : 0,001 Ч
18 + 2,7 Ш	25,6 – 9 Е	0,18 · 12 И	1247 : 1000 А	8,778 : 0,38 А	

Ответ:

0,7	1,247	20,7	76,59	35270	16,6	9,68	23,1	4,1	2,16	0,08

Задание 5. Выполните действия, расположив ответы в порядке возрастания и вписав в ячейки таблицы соответствующие им буквы. Кто это?

0,894 + 89,4 Л	6,4 – 2,96 Л	61,6 : 100 О	177,1 : 46 Я	2,6 · 3,45 Г	495,6 : 0,7 В
241,608 + 24,7 О	50,1 – 9,323 И	0,29 · 37 В	90,8 · 0,1 А	0,18 · 0,25 К	18 : 1,2 Р

Ответ:

Учитель. Ребята, выполнившие верно задание, могут получить карточки, в которых рассказывается о подвиге юного героя, чье имя и фамилию вы отгадали.

Коля Гаврилов

Июль 1943 года, Курская дуга. Одному из солдат всего 19 лет. Зовут его Гаврилов Николай Степанович. Лицо его в ссадинах и царапинах с запекшейся кровью. Что произошло там, в бою? Участок нашего фронта оказался обнаженным. Пехота к нему не поспела. Артиллеристы остались одни. На уязвимый участок лавиной двинулись фашистские танки. Много их было, десятки. Содрогалась земля. Наши орудия открыли огонь. Танки горели, за ними выдвигались новые и новые, били из пушек по нашим орудиям. Коля Гаврилов с ужасом обнаружил, что остался возле орудия один: его товарищи тяжело ранены или убиты. Коля решил стрелять из подбитого орудия, один за всех, за истекающих кровью друзей, за убитого командира. Он стрелял без прицела — прицельное приспособление было сорвано, смотрел прямо в канал ствола. Трудно одному стрелять из пушки, которую в бою обслуживает шесть человек.

Фашистские танки отпрянули от страшного места, повернули в сторону, уходя от гибели. Только после этого Николай попытался перевязать раненых товарищей. Но тут снаряд поднял пушку на воздух, и Колю взрывной волной швырнуло на землю. Оглушенный, окровавленный, изнемогающий, он дотащил двух товарищей до медсанбата.

Потом Николай узнал, что наши артиллеристы, и сам он в том числе, на опасном, обнаженном участке, в шесть километров длиной, отбили атаку трехсот фашистских танков.

Зина Портнова

Зина Портнова уничтожила не один десяток фашистских офицеров, работая в столовой. Схватив 16-летнюю партизанку, гестаповцы около месяца подвергали ее нечеловеческим пыткам. На одном из допросов фашистский офицер положил на стол пистолет и заявил, что если она ничего не скажет, ее расстреляют. Зине удалось схватить пистолет и выстрелить в следователя. Второй пулей она убила появившегося в дверях офицера и выпрыгнула в окно. Навстречу ей бежал автоматчик. Портнова нажала на спусковой крючок пистолета, но выстрела не последовало. Автоматной очередью фашист ранил ее в обе ноги. Истекающую кровью девушку гитлеровцы схватили и снова доставили в гестапо. Там ее замучили до смерти.

Леня Голиков

Вся страна в годы Великой Отечественной войны знала о Лене Голикове. Восхищение вызвал его подвиг, совершенный 13 августа 1942 года. Броском гранаты он разбил легковую автомашину противника на дороге Псков — Луга. Ехавшие в ней гитлеровцы погибли, а генерал Рихард Вирту остался жив. Он выскочил из машины и пустился наутек. Голиков бросился за ним. Завязалась перестрелка. Из этого поединка победителем вышел 16-летний партизан. Его меткая пуля настигла врага.

В портфеле генерала оказались ценные документы. Их отправили в Москву. Отважного партизана решено было отметить высшей наградой. Но получить ее Леня не успел. В одном из тяжелых боев, уничтожив десяток гитлеровцев, юный автоматчик погиб. Лене Голикову посмертно присвоено звание Героя Советского Союза.

Зоя Космодемьянская

О подвиге Зои Космодемьянской впервые было рассказано в очерке «Таня», напечатанном в газете «Правда» 27 января 1942 года. Тогда еще не было известно, кто эта девушка. Ею оказалась ученица 10-го класса школы № 201 Октябрьского района города Москвы, которая в октябре 1941 года ушла добровольцем на фронт, в партизаны. Прощаясь с матерью, она сказала: «Не плачь, родная. Вернусь или умру героем...»

18 ноября 1941 года с группой товарищей она перешла линию фронта у деревни Обухово (близ г. Наро-Фоминск) и через несколько дней пробралась в район села Петрищево, где был штаб крупной немецкой части. Зое удалось перерезать провод полевого телефона, поджечь конюшню, где находились 20 лошадей и оружие. Но немецкие часовые выследили девушку и схватили. 29 ноября 1941 года в середине дня после страшных пыток Зою привели к виселице. Сюда же фашисты согнали и жителей деревни. В последний миг своей жизни она, обращаясь к жителям деревни, крикнула: «Мне не страшно умирать, товарищи! Это счастье — умереть за свой народ!»

Зое Космодемьянской посмертно присвоено звание Героя Советского Союза, прах ее похоронен на Новодевичьем кладбище в Москве. Было Зое 18 лет...

Саша Чекалин

Когда началась Великая Отечественная война, Саше Чекалину было 16 лет. Как и все мальчишки, он учился в школе, играл «в войну»,

помогал родителям и соседям. Паренька любили и в родном селе Песковатское, что было расположено недалеко от небольшого городка Лихвин Тульской области, и в школе.

В октябре 1941 года гитлеровцы начали большое наступление. Фронт приближался к Лихвину. Саша вместе с отцом пришел в партизанский отряд «Передовой». Партизанский отряд наносил фашистам значительный урон: горели склады, взрывались на минах автомашины, шли под откос вражеские поезда, бесследно исчезали вражеские часовые, патрули, предатели. Однажды группа партизан, в числе которых был и Саша Чекалин, устроили засаду у дороги на город Лихвин. Вдали показались машины. Минута — и взрыв разнес ее на части. За ней взорвались еще несколько машин. Одна из машин, переполненная немецкими солдатами, пыталась проскочить. Но граната, брошенная Чекалиным, уничтожила ее.

В начале ноября 1941 года Саша заболел, и комиссар отряда отправил его в родную деревню подлечиться. Там предатель выдал юного патриота. Ночью фашисты ворвались в дом, где лежал больной мальчик. В ответ на предложение фашистского офицера сдаться Александр Чекалин выхватил гранату и бросил ее в пришедших за ним. Граната не взорвалась. Немецкие изверги схватили юного героя, отвезли в штаб и подвергли пыткам. Чекалин молчал. Его пытали долго и жестоко, но он не ответил ни на один вопрос, не выдал товарищей. Не добившись ничего, фашисты решили повесить юного героя на центральной площади Лихвина.

В центре города была сооружена виселица. Ее оцепили сотни солдат, десятки конных. Сопровождаемый усиленным конвоем, полураздетый, Саша медленно шел к месту казни. Вот площадь, родная школа. Фашисты согнали сюда людей. Фанерную дощечку с надписью «Такой конец ждет всех партизан» Чекалин снял с себя и отбросил в сторону.

Своим палачам он успел бросить в лицо: «Нас очень много, всех не перевешаете. Победа будет за нами!» А когда ему стали надевать петлю на шею, звенящим голосом запел «Интернационал». Он пел про последний, решительный, свой смертный бой. Фашисты требовали замолчать, а песня все набирала силу! И вдруг прервалась на полуслове...

Более 20 дней немцы не разрешали убирать с виселицы его труп. 27 ноября 1941 года Красная Армия освободила Лихвин. Сашу Чекалина торжественно похоронили тут же, на площади. О подвиге юного партизана узнала вся страна. В 1944 году город Лихвин был переименован в Чекалин.

Учитель. В памяти народа навечно останутся 29 трагических дней обороны не покорившейся врагу Брестской крепости, 250 дней героической обороны Севастополя, 900 дней блокадного Ленинграда, давших миру непревзойденные образцы стойкости человеческого духа, 103 дня Великой битвы под Москвой, 201 день насмерть стоявшего Сталинграда и 50 дней сражения на Курской дуге.

Итог урока. Рефлексия

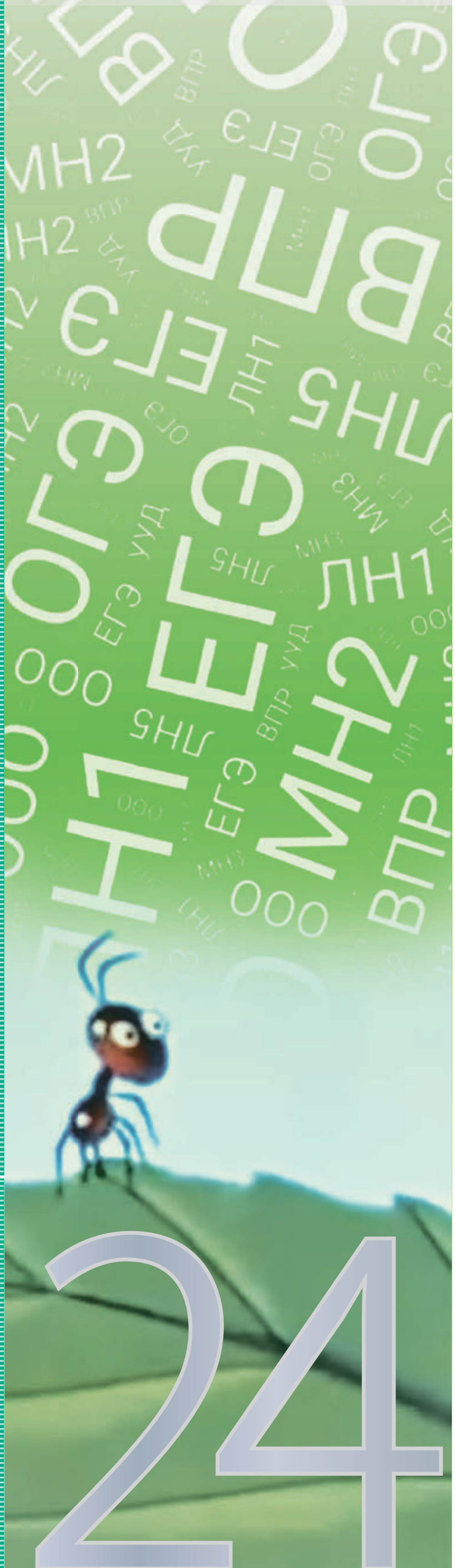
Выставление отметок (только положительных), заранее подготовленные ребята читают стихотворение М. Шпитального «Лене Голикову» (см. электронное приложение).

Домашнее задание

Придумать две задачи по темам «Действия с десятичными дробями» и «Проценты», отражающие тематику Великой Отечественной войны.

О. ЛАВРОВА,
г. Малоярославец,
Калужская обл.

МОНИТОРИНГ МЕТАПРЕДМЕТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ



В Концепции развития математического образования в Российской Федерации обозначено, что «качественное образование необходимо каждому для его успешной жизни в современном обществе. Успех нашей страны в XXI веке, эффективность использования природных ресурсов, развитие экономики, обороноспособность, создание современных технологий зависят от уровня математической науки, математического образования и математической грамотности всего населения, от эффективного использования современных математических методов».

Работая в школе, мы понимаем всю значимость и всю ответственность этой ситуации. Организация различных подходов к формированию универсальных учебных действий (далее УУД) в системе основного общего образования должна соответствовать новым социальным запросам общества.

Математика один из наиболее значимых предметов с точки зрения ее вклада в развитие интеллекта учащихся. В первую очередь при обучении математике у ученика развиваются такие свойства интеллекта, как интуиция, логическое, пространственное, техническое мышление, способность к конструктивно-математической деятельности, комбинаторный стиль мышления. Благодаря своей универсальности математика вооружает учащихся методами познания других наук.

И мне, как учителю, при этом необходимо понять:

1) как УУД включаются в практику обучения предмету «Математика»;

2) как организуется мониторинг овладения УУД и, при необходимости, коррекция его выполнения;

3) как организуется контроль уровня сформированности УУД и как на практике использовать его результаты при решении учебных задач (как на уроках, так и во внеурочной деятельности).

Учителю необходимо «увидеть» и оценить деятельность учащихся, сформированность у них учебной мотивации, а также определить, насколько активно они работают над осуществлением своих целей обучения.

Согласно требованиям ФГОС ООО, целенаправленному формированию и отслеживанию подлежат не только предметные, но и метапредметные образовательные результаты, под которыми понимаются способы деятельности.

Термин «универсальные учебные действия» означает совокупность способов действий учащегося [1]. Известный психолог Н.А. Менчинская отмечала, что действие, усвоенное учеником в процессе учебно-познавательной деятельности, становится умением [3].

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

Вывести учащихся на высокий метапредметный результат учитель может только в результате систематической, постоянной работы над формированием УУД в течение всего обучения детей в школе. Для того чтобы отследить продвижение каждого ребенка на пути его развития и определить эффективность собственной педагогической работы, нужен диагностический инструментарий с выделенными этапами и показателями, построенный во взаимодействии со всем педагогическим коллективом.

Работая над данной темой, выслушивая отзывы коллег, понимая значимость и трудоемкость этой работы, было принято решение о разработке системы мониторинга, с помощью которой учитель сможет определить степень сформированности метапредметных и предметных результатов обучения математике в 5-м классе, наметить индивидуальную траекторию развития каждого ученика и применить эффективную коррекцию для тех учеников, у кого мониторинг выявит несформированность проверяемых умений.

К сожалению, учителя-предметники испытывают серьезные затруднения в оценке метапредметных УУД на уровне предметного контроля.

Для работы с этими критериями и проверки их надежности и взаимосвязи отдельных показателей эффективности образования необходимо наличие особого инструментария — системы методик, учебных заданий, вопросов, листов наблюдения, выполняющих контрольно-диагностические функции.

Работ, посвященных проблеме формирования УУД при обучении математике в основной школе, не так много. Разработкой методик обучения математике в 5-м классе в свое время занимались Е.С. Березанская, Ю.М. Колягин, К.И. Нешков, Л.М. Фридман, А.С. Чесноков, Г.И. Саранцев и др. Ими был предложен конкретный материал и даны рекомендации по формированию отдельных видов УУД.

Для того чтобы выстроить систему уровневого мониторинга сформированности УУД, надо рассмотреть несколько вопросов:

1) как оценить сформированность действия;

2) как выстроить уровневые составляющие;

3) как определить содержание наполнения универсальных учебных действий.

ФГОС предлагает типологию УУД, в соответствии с которой все они могут быть разделены на три вида: регулятивные, познавательные и коммуникативные. Но эта типология не позволяет нам определить специфические пути формирования тех или иных УУД. Универсальные действия не привязаны к конкретной учебной теме, предмету или учебной деятельности. Они соотносимы с жизнедеятельностью человека в целом и формируются внутри учебного процесса благодаря предметному знанию, опыту учебной деятельности и учебной коммуникации.

М.Р. Битянова и Т.В. Меркулова [2] делят УУД на две группы с точки зрения подходов к их формированию.

Первая группа: универсальные способы действия, мышления, коммуникации, самопознания. Она закрепляет за собой наиболее точные, полные алгоритмы выполнения тех или иных действий. К данной группе относятся познавательные УУД (логические и информационные) и часть коммуникативных. Задача учителя заключается в передаче учащимся способа действий и формировании на его основе умения. Для этого используются специально подобранные предметные задания. Примеры заданий, формирующих данные УУД, приведены в уроке «Занимательные задачи в обыкновенных дробях» далее.

Формирование и развитие метапредметного направления можно проследить на «предметном массиве» контрольных и самостоятельных работ (МН1–МН5).

Вторая группа: структурные элементы учебной деятельности. Она обеспечивает осуществление учебной деятельности на разных ее этапах. Передавать учащимся способы осуществления данных УУД можно только в процессе специально организуемой учебной или практической деятельности. К этой группе УУД относятся все регулятивные универсальные учебные действия и часть коммуникативных. Конкретно — те коммуникативные УУД, которые обеспечивают осуществление групповой деятельности: определение общей цели, распределение обязанностей и ролей, выработку общей позиции по поводу путей достижения цели и т.д.

Основным инструментом формирования УУД второй группы является урок, выстроенный по деятельностной технологии. Оценивание этих УУД строится на основе наблюдения учеников в процессе работы в группе либо над исследовательскими проектами. В этом случае работают еще классный руководитель, психолог, социальный педагог, каждый наблюдает за своей группой, занося результаты в листы наблюдения (см. приложение 2 в электронном виде).

Умения, входящие в состав второй группы, определяем как умения личностного направления (ЛН1–ЛН5). Перечень метапредметных результатов взят из программы по предмету «Математика» для 5-го класса (учебник «Математика. 5 класс», авторы С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин, 2015 г.).

Перечень метапредметных и предметных результатов

КОД по ЭЖ	Планируемые результаты
ЛН1	Умение дополнять и исправлять ответы других учащихся, предлагать свои способы решения задач, приводить примеры и контрпримеры
ЛН2	Замечать в устной речи других учащихся неграмотно сформулированные мысли
ЛН3	Приводить примеры математических фактов
ЛН4	Креативность мышления, инициатива, находчивость, активность при решении арифметических задач
ЛН5	Умение выполнять пошаговый контроль, взаимоконтроль результата учебной математической деятельности
МН1	Умение анализировать условие задачи (для нового материала — на основе учета выделенных учителем ориентиров действия)
МН2	Подбирать примеры из жизни в соответствии с математической задачей
МН3	Понимать и использовать математические средства наглядности (графики, диаграммы, таблицы, схемы и др.) для иллюстрации математических фактов, понятий
МН4	Устанавливать причинно-следственные связи, строить логические рассуждения, умозаключения (индуктивные, дедуктивные и по аналогии) и выводы
МН5	Понимать сущность алгоритма, умение действовать по готовому алгоритму, принимать решение в условиях неполной и избыточной информации

Примечание. ЭЖ — электронный журнал.

Проанализировав содержание контрольных работ по усвоению программного материала (*Потапов М.К., Шевкин А.В.* Пособие для общеобразовательных организаций. — 13-е изд. — М.: Просвещение, 2017), были определены задания, которые можно использовать при диагностике результатов первой группы УУД (см. приложение 1 в электронном виде).

Спецификация для контрольной работы № 3. «Представление натуральных чисел на координатном луче»

№ задания	Содержание задания	Контролируемые умения/max балл
1	На прямой отметили пять точек. Сколько образовалось лучей с началом в этих точках?	МН1/1; МН3/1
2	Выразите: а) в сантиметрах: 4 м 12 см; 12 м 4 см; 14 дм; б) в миллиметрах 7 м 78 см; в) в дециметрах 5100 мм	МН5/3
3	а) На координатном луче отметьте точки $O(0)$, $A(4)$, $B(3)$, $C(9)$. б) Какую координату имеет точка E — середина отрезка BC? в) Какова длина отрезка BC?	МН1/3
4	На координатном луче отметьте точки $O(0)$, $B(7)$ и точку C так, чтобы расстояние BC было равно 3. Сколько решений имеет задача?	МН1/1; МН3/1
5	Сумма двух чисел равна 436, а разность этих чисел равна 122. Найдите эти числа	МН1/1; МН3/1

Итого: max балл МН1 — 6; МН3 — 3; МН5 — 3.

Сегодня в системе образования формируется комплексная система оценки качества образования, включающая ОГЭ, ЕГЭ, Всероссийские проверочные работы (ВПР), национальные и международные исследования качества образования.

Как же использовать результаты ВПР в мониторинге качества математического образования?

Главная особенность ВПР заключается в том, что она позволяет взглянуть на результаты образования комплексно: оцениваются не только достижения планируемых результатов, но и основные метапредметные результаты (см. приложение 3 в электронном виде).

Какой же инструмент позволит быстро обработать информацию? Это электронный журнал (ЭЖ), созданный на основе электронных таблиц в программе Excel.

Электронный журнал рассчитан в 5-м классе на восемь контрольных работ, шесть самостоятельных работ и ВПР.

На главной странице ЭЖ выведены четыре столбца (рис. 1).

В первом столбце формируется список класса, во втором — наименование работы и дата ее проведения, а в третьем столбце прописан перечень планируемых результатов в личностном, метапредметном и предметном направлениях. Каждому умению присвоен код, который позволяет оперативно ориентироваться на страницах журнала. Список класса дублируется программой на

Рис. 1

всех станицах журнала, за учеником закрепляется отдельный лист, на котором уровень сформированности результатов развития показан в виде графика или диаграммы (рис. 2).

На страницах ЭЖ есть возможность увидеть и проанализировать уровень сформированности умений как по классу в целом (по итогам контрольной работы), так и по каждому ученику в отдельности.

Электронный журнал адаптирован под любые критерии оценивания. Я предлагаю использовать следующие оценки результатов обучения.

1. Умения личностного направления (набор качеств) — на основании наблюдений учителя:

0 баллов — умение не развито;

1 балл — умение прослеживается.

Максимальный балл определяется как суммарный по характеристике.

2. Умения метапредметного и предметного направлений — на основании результатов самостоятельных, контрольных работ и ВПР:

0 баллов — умение не развито;

1 балл — умение развито на базовом уровне;

2 балла — умение развито на повышенном уровне.

Максимальный балл рассчитывается как суммарный по количеству заданий в работе по данному умению. На основании результатов контрольных работ, ВПР, листов наблюдения формируется уровневая составляющая [5]. Интерпретация уровней может быть различной, в таблице на с. 28 предлагается один из возможных вариантов.

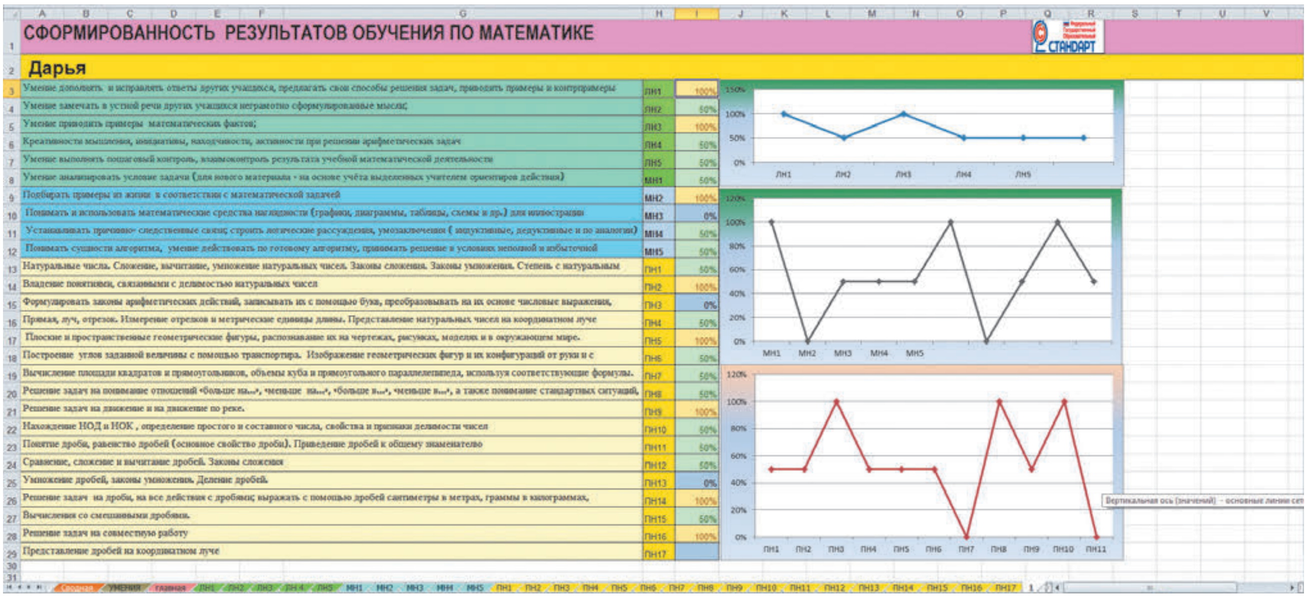


Рис. 2

Уровни сформированности УУД

Уровень	%	Общая характеристика уровня
Репродуктивный (Р)	Менее 45	Учащиеся показывают умение внимательно прослушать (или рассмотреть), запомнить и воспроизвести определенную информацию (действие при этом не сформировано)
Репродуктивно-вариативный (Р–В)	46–65 (базовый)	Учащиеся показывают умение (сталкиваются с необходимостью) преобразований, реконструкций, обобщений, привлечения ранее полученных знаний и умений при решении учебных задач (проблем)
Вариативно эвристический (В–Э)	66–85 (повышенный)	Учащиеся показывают умение решать проблемы, прослеживается опыт поисковой деятельности, где учащиеся овладевают элементами творчества
Эвристический (Э)	86–100 (олимпиадный, лидер)	Учащиеся могут раскрывать новые стороны изучаемых явлений, объектов, процессов, высказывать собственные суждения, видеть и формулировать проблемы, выдвигать гипотезы для их решения

Между этими уровнями существует преемственная связь — каждый из предыдущих является основой для последующего, что «является основой и для обеспечения оптимального усвоения учащимися знаний и для развития их творческих способностей, овладением опытом творческой деятельности». [5]

Цветовое оформление уровней дает визуальную поддержку интерпретации результата. На каждой странице журнала есть таблица, показывающая количество учеников конкретного уровня и обобщающая результат в листе «Сводная» (рис. 4).

Мониторинг результатов совместно с программным обеспечением — электронным журналом позволит учителям проводить диагностику результатов освоения учебного предмета «Математика» в 5-м классе.

Основным результатом использования данного мониторинга будет ресурс в развитии системы математического образования целого ряда аспектов:

– во-первых, использование этого мониторинга для определения уровня сформированности УУД на предметном материале поможет снять психологический барьер у учителей математики, обеспокоенных своего рода «вакуумом» в диагностике метапредметных результатов;

– во-вторых, опыт, который получат учителя, выбравшие электронный журнал в качестве диагностического инструмента, станет ориентиром для повышения квалификации;

– в-третьих, важным социальным результатом использования методической разработки является расширение пространства диалога семьи и школы. Такой разворот использования мониторинга и диагностики крайне важен для решения задачи повышения качества математического образования.

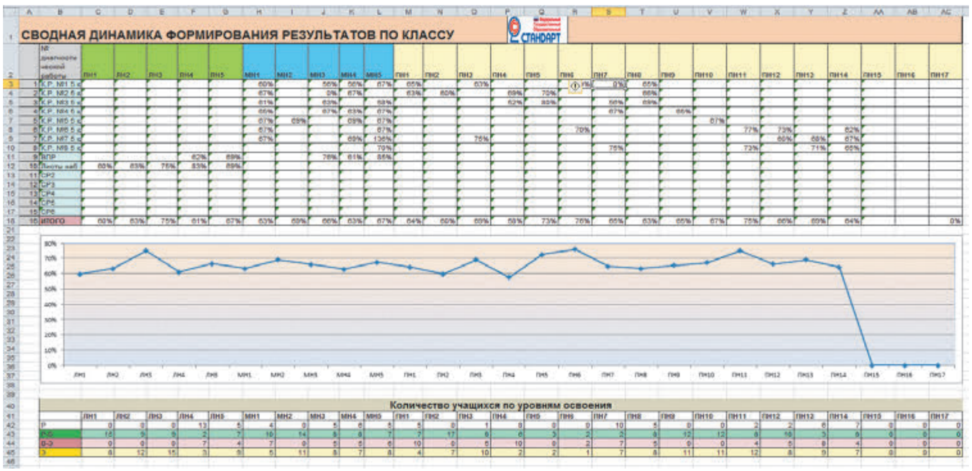


Рис. 4

Урок «Занимательные задачи в обыкновенных дробях» по сказке В. Бианки «Как Муравьишка домой спешил»

Аннотация. Последний урок раздела «Обыкновенные дроби» в 5-м классе разработан в соответствии с требованиями ФГОС ООО для учебной программы и учебного комплекта: *Никольский С.М.*, и др. Математика. 5 класс.

Тип урока: урок систематизации и обобщения знаний и умений.

Форма обучения: практикум с элементами учебного исследования.

Цели урока: выявление степени усвоения знаний и применяемых умений по теме «Обыкновенные дроби», создание условий для систематизации изученного материала, творческой деятельности учащихся.

Формируемые планируемые результаты

а) *предметные*:

– применять алгоритм действия с обыкновенными дробями и смешанными числами;

– переводить мелкие единицы измерения в более крупные и наоборот;

– осознавать изучаемые понятия как модели, позволяющие описывать и изучать реальные процессы и явления;

– работать с математическим текстом;

б) *метапредметные*:

познавательные УУД:

– самостоятельно формулировать тему, проблему; сравнивать и анализировать, выделять главное;

– понимать и использовать математические средства наглядности (таблицы, схемы и др.) для решения учебных задач;

– анализировать условие задачи;

– работать со справочной литературой;

– осуществлять поиск необходимой информации;

регулятивные УУД:

– работать по данному плану, сверяя свои действия с целью, прогнозировать, корректировать свою деятельность;

– выполнять пошаговый контроль, взаимоконтроль результата учебной математической деятельности;

– в диалоге с одноклассниками определять степень успешности своей работы и работы других;

– применять имеющиеся знания в измененной ситуации;

коммуникативные УУД:

– осознанно использовать речевые средства в соответствии с задачей коммуникации;

– уверенно владеть устной и письменной речью;

в) *личностные*:

– совершенствовать навыки математических вычислений;

– переосмысливать собственные знания по изучаемой теме и применять их на практике;

– толерантно относиться к мнению других, осознавать значимость чувства товарищества, способности сопереживать;

– быть деликатным, дисциплинированным, ответственным;

– понимать важность заботы об окружающей природе.

Факторы, обеспечившие результативность урока

а) Характеристика системы упражнений. Подбор упражнений направлен на повторение основных знаний по правилам работы с обыкновенными дробями: действия с дробями и смешанными числами, перевод из одних единиц измерения в другие. Урок содержит материал экологического значения о необыкновенном мире природы и ее обитателях, тем самым расширяет кругозор учащихся и реализует их творческий потенциал.

б) Формы организации познавательной деятельности. Учащиеся в течение урока работают в пяти группах по пять человек. Каждая группа получает ноутбук, где найдет задания. Результаты работы группы оформляют на листах ответов, обсуждают. К концу урока ученики должны дать ответ на поставленный вопрос.

Раздаточный материал: листы для ответов учащихся, карточки-инструкции для проведения работы, таблицы-подсказки, текст сказки, карта-схема передвижения героев.

Оборудование: пять ноутбуков для работы в группах, проектор, файл мультфильма «Путешествие Муравьишки» («Союзмультфильм», 1983 г.).

Межпредметные связи

– Использование на уроках математики материала из художественного произведения позволяет внести в урок элементы занимательности и продемонстрировать связь математики с таким важным школьным предметом, как литература.

– Связь математики и биологии прослеживается в тематике заданий, построенных на характеристических особенностях насекомых.

– Привлечение знаний о географических понятиях (горизонт, заход солнца, характеристика ветра) позволяет наполнить конкретным содержанием абстрактные математические понятия из курса географии.

– Умение рассчитать время захода солнца выстраивает связь с курсом ОБЖ.

Показатели результативности урока

– проверка решения и логико-смысловая таблица, заполненная учениками, позволяют систематизировать, обобщить и проанализировать информацию, полученную при решении учебной задачи, и сделать соответствующий вывод;

– объем знаний, достаточный для решения учебных задач;

– атмосфера сотрудничества, сотворчества, психологического комфорта;

– повышенная учебная мотивация, активность привлечения к работе слабых учеников.

ХОД УРОКА

Самоопределение к учебной деятельности

На экране демонстрируется начало мультфильма. На фрагменте, когда лист отрывается и уносит муравья в его путешествие, учитель задает вопрос.

Учитель. Ребята вы все знаете сказку Виталия Бианки «Как Муравьишка домой спешил». Предлагаю смоделировать реальную ситуацию: в качестве героев сказки рассмотреть насекомых, обитающих на территории Калужской области и, использовав их характеристики, ответить на вопрос: «Сколько времени потребуется Муравьишке, чтобы добраться домой до захода солнца»?

Ученики выдвигают гипотезы. Учитель предлагает отправиться в путешествие вместе с героем сказки и проверить правильность предположений.

Учитель. В пути вам потребуется проявить свои математические знания, ум, смекалку, умение сотрудничать друг с другом при выполнении заданий. Вы готовы? Тогда в добрый путь!

Планируемые результаты: умение подбирать примеры из жизни в соответствии с математической задачей (МН2) (здесь и далее метапредметные направления МН).

Актуализация знаний

Учитель. А начнем мы с вами с игры «Да или нет». Выигрывает та группа, которая быстрее даст больше правильных ответов.

– Один час — это 360 секунд?

– 40 минут — это $\frac{2}{3}$ часа?

– Верно ли, что высота березы 24 м, если $\frac{1}{8}$ ее часть равна 300 см?

– Если масса муравья — половина грамма, а масса майского жука в 40 раз больше, верно ли, что 40 майских жуков могут уравновесить одного муравья?

– Верно ли, что произведение скорости движения на время покажет нам расстояние?

– Если кузнечик умеет одним прыжком преодолевать расстояние, превышающее длину собственного тела в двадцать раз, верно ли, что он сможет прыгнуть на два метра?

Учитель. Молодцы, быстро справились с заданием.

Планируемые результаты: умение анализировать условие задачи (МН1), способность видеть математическую задачу в других дисциплинах, в окружающей жизни (МН2).

Постановка темы и цели урока

Учитель. Наш урок сегодня будет по какой теме?

По теме «Занимательные задачи в обыкновенных дробях».

– Какую цель вы поставите сегодня перед собой?

Повторить правила действий с обыкновенными дробями, тренироваться в решении задач.

– Составим план нашей работы *(совместно с учениками)*:

1. Определить, в котором часу забрался Муравьишка на березу.
2. Определить, как далеко могло отнести Муравьишку от муравейника.
3. Построить маршрут Муравьишки домой.
4. Указать на карте-схеме места, где Муравьишка встречался с неравнодушными героями сказки.
5. Найти время, которое каждый персонаж потратил на помощь нашему герою.
6. Посчитать, сколько времени длилось путешествие Муравьишки, и дать ответ: успел ли он домой до захода солнца.

Учитель. А теперь ознакомьтесь с правилами, которые вы должны будете соблюдать в путешествии.

Правила

1. Команда путешествует, выполняя перемещение совместно с героями сказки.
2. Работать будете в команде; ваша задача — прийти к верному решению.
3. Будьте внимательны в мелочах, ведь в каждой задаче содержится подсказка к следующей.
4. Для решения заданий вам придется работать с различными источниками информации.
5. За правильный ответ вы будете получать фишку-листок. В конце путешествия вы должны заполнить таблицу ответов и сделать вывод.

Планируемые результаты: умение выполнять пошаговый контроль, взаимоконтроль результата учебной математической деятельности (ЛН5).

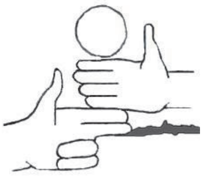
Практическая работа

Учитель. Теперь внимание — давайте начнем наше путешествие. Предположим, что закат солнца в тот вечер должен быть в 20 часов 30 минут.

Задание 1. Сколько времени осталось до захода солнца за горизонт? Ответ дайте в секундах.

Для того чтобы это узнать, нужно вытянуть руку и расположить ладонь так, чтобы солнце «лежало» на указательном пальце. Время до захода Солнца можно определить, посчитав, сколько пальцев закрывает промежуток между светилом и горизонтом, и умножив их число на 15. Принято считать, что один палец соответствует примерно 15 минутам движения Солнца по небосводу.

Ответ: 5400 с.



Планируемые результаты: умение понимать и использовать математические средства наглядности (схемы) для иллюстрации математических фактов, понятий (МН3).

Задание 2. В каком часу происходило действие сказки?

Ответ: 19.00

Планируемые результаты: умение анализировать условие задачи и видеть математическую задачу в окружающей жизни (МН1).

Задание 3. Как вы думаете, как можно описать ветер в сказке, если скорость ветра в тот вечер была $\frac{16}{3}$ м/с? *Справка*. Для определения характеристики ветра используют Шкалу Бофорта.

Ответ: умеренный.

Планируемые результаты: умение понимать и использовать математические средства наглядности (таблицы, схемы и др.) для интерпретации, аргументации (МН3).

Задание 4. Определите, сколько времени летел Муравьишка, если он приземлился на расстоянии 2480 м от березы. С помощью какой формулы можно, зная расстояние и скорость, найти время в пути? Ответ дайте в секундах.

Ответ: 465 с.

Планируемые результаты: умение находить информацию и принимать решение в условиях неполной информации (МН5).

Задание 5. Отметьте на карте-схеме место, где примерно приземлился Муравьишка.

Планируемые результаты: умение понимать и использовать математические средства наглядности (схемы) для иллюстрации математических фактов, понятий (МН3).

Задание 6. Вслед за сюжетом сказки определите по карте-схеме номера тех позиций, где Муравьишка встречал неравнодушных героев сказки. Ответы занесите в столбец 2 Листа ответов.

Планируемые результаты: умение понимать и использовать математические средства наглядности (схемы) для иллюстрации математических фактов (МН3), понятий; умение находить в источниках информацию, необходимую для решения математических проблем (МН5).

Задание 7. Ребята, в предыдущих домашних заданиях вы находили характеристики различных насекомых. Используя их, рассчитайте время в пути, которое затратил каждый персонаж сказки, помогая Муравьишке добраться домой.

Планируемые результаты: умение понимать и использовать математические средства наглядности (схемы) для иллюстрации математических фактов, понятий (МН3).

Задание 8. Сколько времени прошло с момента начала путешествия до возвращения на березу? Что еще необходимо учесть, помимо времени возвращения домой?

Время полета Муравьишки на листе.

Ответ: 5283 с.

Планируемые результаты: умение находить в источниках информацию, необходимую для решения математических проблем (МН5).

Задание 9. Сколько еще времени осталось у Муравьишки, чтобы до заката солнца попасть с березы домой?

Ответ: 117 с.

Учитель. Ребята, как вы думаете, почему в справочном материале нет скорости передвижения гусеницы-листовертки?

Она спускается на паутинке, ее скорость — это скорость ветра.

Задание 10. Скорость ветра в тот вечер была $5\frac{1}{3}$ м/с, успеет ли Листовертка переправить Муравьишку с березы домой?

Ответ: да, успеет.

Если умножить $5\frac{1}{3}$ м/с на 117 с, получим 624 м. Что значительно превышает возможную высоту березы. А Муравей ее еще и уговаривал!

Планируемые результаты: умение устанавливать причинно-следственные связи; строить логические рассуждения, умозаключения и делать выводы (МН4).

Итог урока. Рефлексия деятельности

1 км	100 м	10 м	1 м	1 дм	1 см	1 мм
			2	6	7	9
			4	8	0	2
		1	4	6	7	5
			3	6	7	
	3	6	8	0	9	
3	4	0	2	5		

Вариант 1

а) 2679 мм = 2 м 6 дм 7 см 1 мм

4802 мм =4 м 8 дм 2 мм

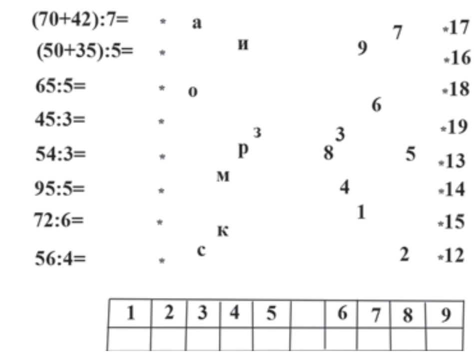
14675 мм = 14 м 6 дм 7 см 5 мм

367 см = 3 м 6 дм 7 см

36809 см = 368 м 9 см

34025 дм = 3 км 402 м 5 дм

1



2

СОЗДАНИЕ ДИДАКТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ
С ПОМОЩЬЮ ПО ACTIVINSPIRE

Г. ГУШНЕВСКАЯ,
с. Яркое Поле, Республика Крым

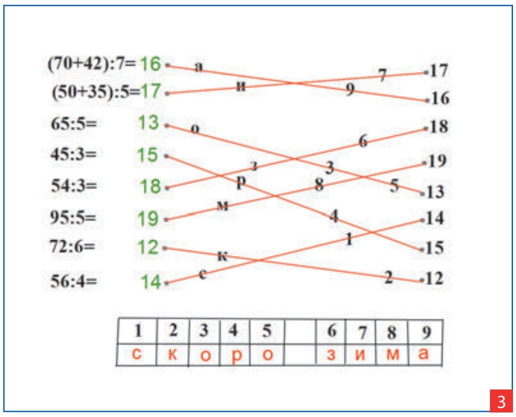
Одна из задач, которая стоит перед учителем создавать на уроках условия для формирования у учеников приемов учебной деятельности, добиваясь включенности каждого ученика в активную учебную деятельность. Решить эту задачу помогают информационно-коммуникационные технологии. Применение компьютерных технологий на уроках дает возможность более наглядного представления изучаемого материала, позволяет оперативно проверять уровень усвоения учащимися программного материала.

Увеличение умственной нагрузки на уроках математики заставляет задуматься и над тем, как поддержать интерес у учащихся, их активность на протяжении всего урока. В связи с этим ведутся поиски новых эффективных методов обучения и таких методических приемов, которые бы активизировали мысль школьников, стимулировали их к самостоятельному приобретению знаний. Возникновение интереса к математике у многих учащихся зависит от методики ее преподавания, от того, насколько умело построена учебная работа. Необходимо позаботиться о том, чтобы на уроках каждый ученик работал активно и увлеченно, и использовать это как отправную точку для развития любознательности, познавательного интереса. Один из способов достижения этой цели — предлагать учащимся занимательные, нестандартные дидактические материалы.

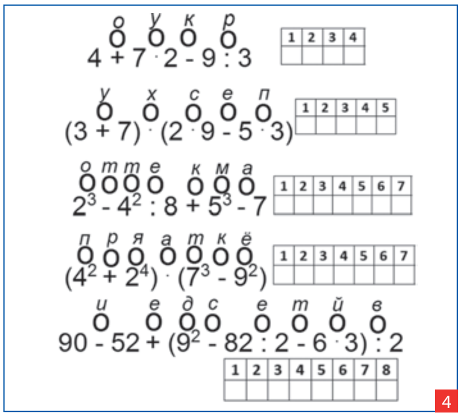
Интересно сформулировать и оформить задания можно при помощи различных программ, в том числе с использованием программного обеспечения для интерактивной доски ActivInspire. С его помощью можно одновременно распечатать и раздать задание на карточках и продемонстрировать это задание на интерактивной доске, а затем организовать проверку правильности выполнения.

При изучении единиц длины помощь в переводе из одних единиц в другие окажет следующая таблица. 1

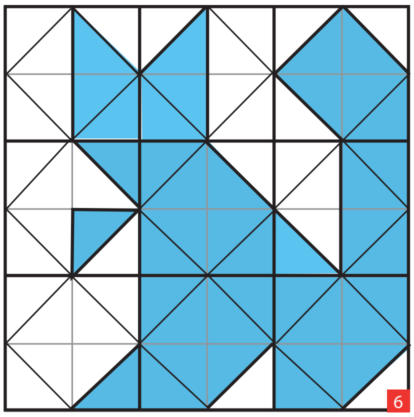
Со временем ученики запоминают, какое количество знаков необходимо для каждой единицы, замечают пропущенные единицы,



3



4


6

сразу записывают вместо них нули. Но на первом тренировочном этапе таблица очень помогает организовать обучение. В дальнейшем подобная таблица поможет и при изучении единиц площади.

При изучении темы «Деление» в 5-м классе можно предложить следующее задание. 2

Выполните действия и соедините отрезками полученные слева ответы с такими же числами справа. Каждый отрезок будет проходить через букву и цифру. В таблицу впишите буквы под соответствующими цифрами и прочитайте фразу.

Расположить буквы таким особым образом легко с использованием упомянутого выше программного обеспечения для интерактивной доски *ActivInspire*, затем скопировать и распечатать карточки всем учащимся. После выполнения задания организовать проверку на доске. 3

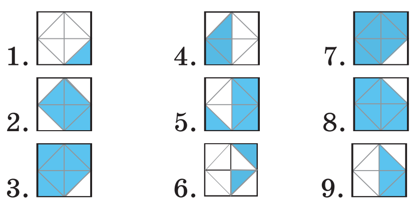
Следующее задание относится к теме «Числовые выражения». Учащимся предлагается установить порядок действий, записать буквы под соответствующими цифрами. 4 Получатся слова «урок», «успех», «отметка» «пятерка», «действие». На этапе рефлексии можно предложить учащимся составить 2–3 предложения с этими словами, подвести итог урока. Если правильно решить все задачи и указанным способом закрасить соответствующий ответу квадратик, то получится некоторое изображение, в данном случае — изображение котика. 6

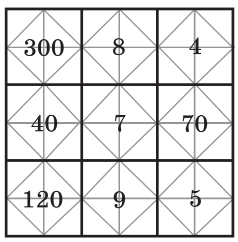
Эти примеры показывают, что задания по математике могут быть разнообразными, нестандартными. Они поддерживают и укрепляют интерес к предмету и стоят потраченного на их создание времени.

Важно, что ученики всегда за использование на уроках ИКТ, хотят работать на интерактивной доске, остаются после уроков, создают свои проекты. Для ребенка, увлеченного математикой, достаточно ручки и бумаги, чтобы получить удовольствие от решения трудной, но интересной задачи. Внимание других детей нужно дополнительно привлекать наглядностью, частой сменой деятельности, визуальными эффектами. Таково современное поколение с его «клиповым мышлением», коротким периодом концентрации внимания и другими особенностями.

В теме «Задачи на приведение к единице» решить много задач и не заскучать позволит такая карточка. 5

1. В одном подъезде 20 квартир. Сколько квартир в шести подъездах?
2. Из 20 м ткани портниха сшила 5 одинаковых платьев. Сколько метров ткани пошло на одно платье?
3. Мама разливала 27 л сока в трехлитровые банки. Сколько банок ей потребовалось?
4. В пяти одинаковых коробках 20 карандашей. Сколько карандашей в двух таких коробках?
5. В трех одинаковых коробках 21 мелок. Сколько мелков в 10 таких коробках?
6. 56 березок посадили в 7 одинаковых рядов. Сколько березок в пяти таких рядах?
7. С восьми овец настригли 48 кг шерсти, с каждой поровну. Сколько овец нужно остричь, чтобы получить 30 кг шерсти?
8. На четырех одинаковых тарелках 20 груш. Сколько потребуется тарелок для 35 груш?
9. В 200 пачках 10 000 ирисок. В скольких пачках находятся 15 000 ирисок?





5

И. УЛЬЯНОВА,
г. Саранск

О ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧАХ НА ДВИЖЕНИЕ ПРОТЯЖЕННЫХ ТЕЛ

Текстовые задачи на движение протяженных тел считаются одними из самых сложных и потому нередко предлагаются участникам математических олимпиад разного уровня. В статье указываются виды таких задач и раскрываются их особенности, учет которых значительно упрощает работу учащихся по решению задач на движение протяженных тел.

Как известно, текстовые задачи в математическом образовании в России всегда занимали и сейчас занимают особое место в силу своего огромного потенциала для обучения, воспитания и развития учащихся [1]. Не являются исключением и текстовые задачи на движение протяженных тел.

Текстовыми задачами большинство авторов называют задачи, в которых содержится описание некоторой реальной ситуации (явления, процесса) на естественном языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между ее компонентами или определить вид этого отношения [2].

Текстовыми задачами на движение принято считать задачи, в которых описывается какое-либо реальное движение некоторых объектов и/или субъектов: куда-то едут автомобили, плывут катера, идут пешеходы и др.

Отличительной особенностью текстовых задач на движение протяженных тел является тот факт, что объекты, осуществляющие движение, обязательно имеют некоторую длину, и эту длину необходимо учитывать при решении задачи. Подобным объектом с длиной (протяженным телом) чаще других выступает поезд, но также им может быть трамвай, пароход и т.п. [4].

Среди текстовых задач на движение протяженных тел можно выделить несколько видов, основываясь на типе движения таких тел. А именно:

– задачи на движение протяженного тела мимо неподвижной точки (задачи первого вида);

– задачи на движение протяженного тела вдоль неподвижного отрезка (задачи второго вида);

– задачи на движение протяженного тела мимо движущейся точки (задачи третьего вида);

– задачи на движение протяженного тела вдоль движущегося отрезка (задачи четвертого вида).

Задачи каждого вида имеют свои индивидуальные особенности, учет которых значительно упрощает работу по их решению. В данной статье мы приведем примеры таких задач и раскроем особенности их решения.

Задачи на движение протяженного тела мимо неподвижной точки

В роли неподвижной точки в задачах первого вида выступает некоторый объект или субъект, размерами которого пренебрегают. Это может быть придорожный столб, семафор, маяк, человек и др.

Задача 1. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 80 км/ч, проезжает мимо семафора за 36 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

При решении задач подобного вида, как и при решении любой текстовой задачи на движение, ключевой является формула, выражающая зависимость между расстоянием s, которое проходит тело, его скоростью v и временем движения t: $s = vt$. При этом под временем t в рассматриваемых задачах подразумевается время, которое проходит от момента, когда начальная точка тела (в задаче 1 это «нос» локомотива поезда) поравнялась с неподвижной точкой (пункт A на рисунке 1), до момента, когда с этой точкой поравнялась конечная точка тела (в задаче 1 это «хвост» последнего вагона).

Рис. 1

Применительно к задаче 1, «нос» локомотива на момент истечения времени t находится в пункте B (см. рис. 1). Поэтому, как можно видеть, искомая длина поезда L равна расстоянию, пройденному поездом за время t, то есть получаем:

$$L = AB = s = t \cdot v =$$
$$= 80\ (\text{км/ч}) \cdot 0{,}01\ (\text{ч}) = 0{,}8\ \text{км} = 800\ \text{м}.$$

На основе сказанного мы можем отметить первую особенность текстовых задач на движение протяженных тел.

Особенности решения задач первого вида

Тип движения протяженного тела	Длина протяженного тела
Движение мимо неподвижной точки	$L_{\text{тела}} = s = v \cdot t$

Задачи на движение протяженного тела вдоль неподвижного отрезка

В роли неподвижного отрезка в задачах второго вида выступает некоторый протяженный объект, который имеет собственную длину, обязательно учитываемую при решении. Таким объектом может быть платформа, лесополоса, тоннель, мост и др.

Задача 2. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 90 км/ч, проезжает мимо платформы длиной 300 м за 30 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

В задачах рассматриваемого вида под временем t подразумевается время, которое проходит от момента, когда локомотив поезда въезжает на мост, в тоннель, в зону лесополосы и т.д. (пункт A на рисунке 2), до момента, когда последний вагон съезжает с моста, выезжает из тоннеля, из зоны лесополосы и т.д. (пункт C на рисунке 2).

Рис. 2

«Нос» локомотива на момент истечения времени t находится в пункте B (см. рис. 2). Поэтому нетрудно заметить, что искомая длина поезда (L) равна расстоянию, пройденному поездом за время t и уменьшенному на длину платформы (L_1). То есть:

$$L = CB = AB - AC = s - L_1 = t \cdot v - L_1,$$
$$L = 25\ (\text{м/с}) \cdot 30\ (\text{с}) - 300\ (\text{м}) = 450\ \text{м}.$$

На основе сказанного мы получаем новую особенность текстовых задач на движение протяженных тел.

Особенности решения задач второго вида

Тип движения протяженного тела	Длина протяженного тела
Движение вдоль неподвижного отрезка	$L_{\text{тела}} = s - L_{\text{отрезка}} = v \cdot t - L_{\text{отрезка}}$

Задачи на движение протяженного тела мимо движущейся точки

В роли движущейся точки в задачах данного вида выступает некоторый объект или субъект, который движется, но размерами которого пренебрегают. Это может быть пешеход, велосипедист, машина и др. В то же время, учитывая то, что «точка» может двигаться в двух направлениях (в том же, что и протяженное тело, то есть параллельно ему, или в противоположном направлении, то есть навстречу ему), то среди задач третьего вида можно выделить два подвида задач на движение протяженных тел.

Задача 3. Скорость поезда 54 км/ч. Параллельно железнодорожным путям *в том же направлении* движется пешеход со скоростью 6 км/ч. Поезд проезжает мимо пешехода за 30 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Ключевыми понятиями при решении задач третьего вида выступают понятия «скорость сближения» (расстояние, на которое участники движения сближаются за единицу времени) и «скорость удаления» (расстояние, на которое участники движения удаляются друг от друга за единицу времени). *Скорость сближения* в рассматриваемых задачах проявляется в случае движения протяженного тела и движущейся точки в одном направлении и вычисляется как разность их скоростей. *Скорость удаления* проявляется в случае движения этих же объектов в разных направлениях и вычисляется как сумма их скоростей.

Сказанное демонстрирует, в частности, решение задачи 3, выполненное в соответствии с рисунком 3, раскрывающим описанную в задаче ситуацию движения.

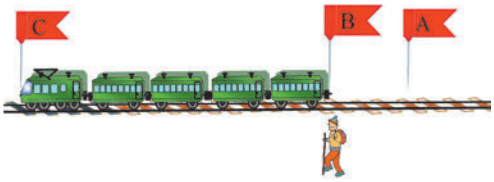


Рис. 3

На этом рисунке флажком с литерой A отмечено место, где «нос» локомотива равняется с пешеходом, а флажком с литерой B — место, где с пешеходом равняется «хвост» последний вагон поезда. Флажок с литерой C показывает местоположение «носа» локомотива в момент истечения времени t — отрезка времени, которое проходит с момента, когда локомотив равняется с пешеходом (пункт A), до момента, когда с пешеходом равняется последний вагон поезда (пункт B). Тогда отрезок AC показывает расстояние, пройденное поездом за время t (высчитывается по перемещению «носа» локомотива за соответствующий период времени), а отрезок AB — расстояние, пройденное пешеходом за то же время t (высчитывается по перемещению пешехода за соответствующий период времени).

Опираясь на рисунок 3, получаем следующее решение задачи:

$$L = BC = AC - AB = s_{\text{поезда}} - s_{\text{пешехода}} =$$
$$= v_{\text{поезда}} \cdot t - v_{\text{пешехода}} \cdot t = (v_{\text{поезда}} - v_{\text{пешехода}}) \cdot t,$$

$$L = (54-6)\cdot\frac{1}{120} = \frac{48}{120} = 0{,}4 \text{ км} = 400 \text{ м}.$$

Задача 4. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 54 км/ч, проезжает мимо идущего параллельно путям со скоростью 6 км/ч *навстречу ему пешехода* за 30 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Рисунок 4 демонстрирует решение данной задачи.

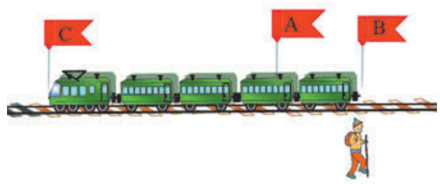


Рис. 4

Как и на рисунке 3, пункт A — это точка, в которой «нос» поезда поравнялся с пешеходом, пункт B — точка, в которой с пешеходом поравнялся «хвост» поезда, пункт C — точка, в которой находился «нос» поезда, когда пешеход поравнялся с концом последнего вагона.

В таком случае длину поезда можно вычислить следующим образом:

$$L = BC = AC + AB = s_{\text{поезда}} + s_{\text{пешехода}} =$$
$$= v_{\text{поезда}} \cdot t + v_{\text{пешехода}} \cdot t = (v_{\text{поезда}} + v_{\text{пешехода}}) \cdot t,$$

$$L = \frac{54+6}{120} = \frac{60}{120} = 0{,}5 \text{ км} = 500 \text{ м}.$$

На основе решений задач 3 и 4 выделим особенности соответствующих видов текстовых задач на движение протяженных тел.

Особенности решения задач третьего вида

Тип движения протяженного тела	Длина протяженного тела
Движение мимо точки, движущейся в одном направлении с протяженным телом	$L_{\text{тела}} = (v_{\text{тела}} - v_{\text{точки}}) \cdot t$
Движение мимо точки, движущейся в противоположном направлении с протяженным телом	$L_{\text{тела}} = (v_{\text{тела}} + v_{\text{точки}}) \cdot t$

Задачи на движение протяженного тела вдоль движущегося отрезка

В роли движущегося отрезка выступает некоторый протяженный объект, который движется и имеет собственную длину. Эту длину, как и в задачах второго вида, также надо учитывать при решении. Таким протяженным движущимся объектом нередко выступает другой поезд, трамвай, фура и др.

Среди текстовых задач рассматриваемого вида можно выделить несколько подвидов, если учитывать направления движения тел, как и в задачах третьего вида, а кроме того — наличие или отсутствие пассажира в одном из тел. Примером такого подвида задач является задача 5.

Задача 5. Пассажир, сидящий в поезде, который идет со скоростью 50 км/ч, заметил, что мимо окна в противоположном направлении в течение 6 секунд шел встречный поезд, длина которого 200 метров. Найдите скорость встречного поезда.

Движение, описанное в задаче, демонстрирует рисунок 5, на котором флажком без литеры отмечено местоположение пассажира в одном из поездов, флажком с литерой A — место, где этот пассажир поравнялся с «носом» локомотива встречного поезда, флажком с литерой B — место, где пассажир поравнялся с «хвостом» последнего вагона встречного поезда.

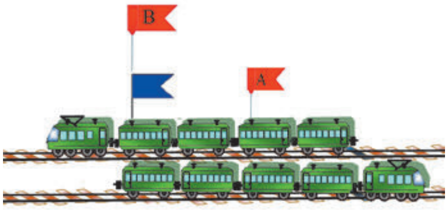


Рис. 5

Решение задач на движение протяженных тел четвертого вида не представляет больших сложностей при условии сформированности у решающего умения решать задачи третьего вида. Поясним почему.

При наличии пассажира в одном из движущихся протяженных тел движение этого тела оказывается идентичным движению пассажира. То есть все параметры движения протяженного тела с пассажиром (его скорость, пройденное расстояние от момента встречи с началом другого тела до момента встречи с концом последнего, а также время от одной встречи до другой) полностью совпадают с соответствующими параметрами движения пассажира. А движущийся пассажир, габариты которого никак не учитываются, есть не что иное, как движущаяся точка. Таким образом, подобная задача четвертого вида сводится к решению задачи третьего вида с тем же типом движения. Поэтому при решении задачи 5 мы можем учитывать соответствующую особенность, указанную в последней таблице, а именно соотношение

$$L_{\text{тела}} = (v_{\text{тела}} + v_{\text{точки}}) \cdot t,$$

где $L_{\text{тела}}$ — длина движущегося тела без пассажира (длина встречного поезда в км), $v_{\text{тела}}$ — скорость движущегося тела без пассажира (искомая скорость встречного поезда в км/ч), $v_{\text{точки}}$ — скорость движущегося тела с пассажиром (в км/ч), t — общее время движения тел (в часах). Подставив в это соотношение данные числовые значения, получаем уравнение, из решения которого найдем требуемое:

$$0{,}2 = (50 + v) \cdot \frac{1}{600} \Rightarrow 120 = 50 + v \Rightarrow v = 70 \text{ км/ч}.$$

Задачи на движение протяженных тел четвертого вида, в которых нет тел с пассажирами, оказываются более трудными. Тем не менее при условии наличия некоторого опыта их решения, сформированности необходимых умений и знании их индивидуальных особенностей процесс решения оказывается вполне посильным. Выделим такие особенности, обратившись к задачам 6 и 7.

Задача 6. По двум параллельным железнодорожным путям *навстречу друг другу* следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 70 км/ч и 50 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 600 м. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 30 секундам. Ответ дайте в метрах.

Задача 7. По двум параллельным железнодорожным путям *в одном направлении* следуют пассажирский и товарный поезда, скорости которых равны соответственно 90 км/ч и 30 км/ч. Длина товарного поезда равна 600 метрам. Найдите длину пассажирского поезда, если время, за которое он прошел мимо товарного поезда, равно 1 минуте. Ответ дайте в метрах.

Ситуации встречи поездов из задач 6 и 7 в пункте A показаны, на рисунках 6,*а* и 7,*а*. А ситуации разъезда поездов от пункта B показаны на рисунках 6,*б* и 7,*б*.

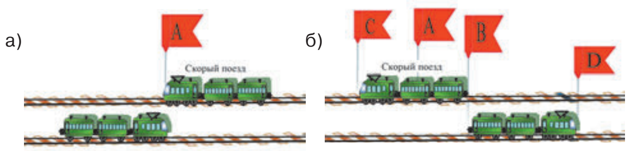


Рис. 6

Пункт C на рисунке 6,*б* — это местоположение начальной точки локомотива *скорого* поезда по истечении времени движения t, что позволяет найти расстояние, пройденное телом за это время ($s_{\text{скор}} = AC$). Пункт D на рисунке 6,*б* — это местоположение начальной точки локомотива *пассажирского* поезда также по истечении времени движения t, что позволяет найти расстояние, пройденное этим телом за данное время ($s_{\text{пассаж}} = AD$). Исходя из сказанного, длину скорого поезда (отрезок BC) можно вычислить следующим образом:

$$L_{\text{скор}} = BC = AC + AB = s_{\text{скор}} + (AD - BD) =$$
$$= s_{\text{скор}} + s_{\text{пассаж}} - L_{\text{пассаж}} =$$
$$= v_{\text{скор}} \cdot t + v_{\text{пассаж}} \cdot t - L_{\text{пассаж}} =$$
$$= (v_{\text{скор}} + v_{\text{пассаж}}) \cdot t - L_{\text{пассаж}},$$
$$L_{\text{скор}} = (70+50)\cdot\frac{1}{120} - 0{,}6 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4 \text{ км} = 400 \text{ м}.$$

На рисунках 7,*а* и 7,*б* пункт C — это местоположение «носа» локомотива товарного поезда, когда его догнал пассажирский поезд. Фиксирование этой точки позволит найти длину товарного поезда ($L_{\text{товар}} = AC$) и расстояние, которое он пройдет за время движения t ($s_{\text{товар}} = CB$). Пункт D на рисунке 7,*б* — это местоположение «носа» локомотива пассажирского поезда по истечении времени t. Фиксирование этой точки позволяет найти длину пассажирского поезда ($L_{\text{пассаж}} = BD$) и расстояние, которое он пройдет за время движения t ($s_{\text{пассаж}} = AD$).

Рис. 7

Таким образом, решение задачи 7 будет следующим:

$$L_{\text{пассаж}} = BD = AD - AB = s_{\text{пассаж}} - (AC + CB) =$$
$$= s_{\text{пассаж}} - (L_{\text{товар}} + s_{\text{товар}}) =$$
$$= v_{\text{пассаж}} \cdot t - (L_{\text{товар}} + v_{\text{товар}} \cdot t) =$$
$$= (v_{\text{пассаж}} - v_{\text{товар}}) \cdot t - L_{\text{товар}},$$
$$L_{\text{пассаж}} = (90-30)\cdot\frac{1}{60} - 0{,}6 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4 \text{ км} = 400 \text{ м}.$$

Из решений задач 5–7 на движение протяженных тел четвертого вида, также как и при решении задач третьего вида, основную нагрузку несут понятия скорость сближения и скорость удаления. Что обусловливает выделение особенностей решения задач четвертого вида.

В заключение рассмотрим задачу 8, которая предлагалась в текущем учебном году учащимся 8-го класса на Всероссийской математической олимпиаде по физике [5].

Задача 8. Пассажир, сидящий в поезде, обратил внимание на то, что мост «проехал» мимо него за время $t_1 = 20$ с. Поезд двигался по мосту равномерно в течение времени $t_2 = 70$ с (это время, которое прошло от момента въезда на мост локомотива до момента съезда с моста «хвоста» последнего вагона). Во сколько раз длина поезда больше длины моста? Получите ответ в виде формулы и затем найдите численный ответ.

Решение. Данную задачу можно отнести к текстовым задачам на движение протяженных тел второго вида, так как мост можно воспринимать как неподвижный отрезок. Тогда, опираясь на вторую таблицу, мы имеем:

$$L_{\text{поезда}} = v_{\text{поезда}} \cdot t_2 - L_{\text{моста}},$$

то есть

$$L_{\text{поезда}} = 70 \cdot v_{\text{поезда}} - L_{\text{моста}} = 70v - L_{\text{моста}}.$$

С другой стороны, пассажира, сидящего в поезде, можно воспринимать как непротяженное тело, движущееся со скоростью поезда от пункта A (начало моста) до пункта B (конца моста). Поэтому расстояние AB, которое проедет пассажир за время t_1, есть длина моста. Тогда

$$L_{\text{моста}} = v_{\text{пассажира}} \cdot t_1 = v_{\text{поезда}} \cdot t_1,$$

то есть

$$L_{\text{моста}} = 20 \cdot v_{\text{поезда}} = 20v.$$

Исходя из пунктов 1 и 2 решения, найдем требуемую формулу и численный ответ:

$$\frac{L_{\text{поезда}}}{L_{\text{моста}}} = \frac{70v - 20v}{20v} = \frac{50v}{20v} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$$

Конечно, решить эту задачу можно и иначе, но, подводя итог сказанному, отметим, что учет особенностей решения текстовых задач на движение значительно упрощает выполнение требований последних.

Особенности решения задач четвертого вида

Тип движения протяженного тела	Длина протяженного тела	Пояснения
Движение вдоль протяженного тела с пассажиром, движущегося в одном направлении	$L_{\text{тела 1}} = (v_{\text{тела 1}} - v_{\text{тела 2}}) \cdot t$	Тело 1 — протяженное тело без пассажира, тело 2 — протяженное тело с пассажиром
Движение вдоль протяженного тела с пассажиром, движущегося в противоположном направлении	$L_{\text{тела 1}} = (v_{\text{тела 1}} + v_{\text{тела 2}}) \cdot t$	
Движение вдоль другого протяженного тела, движущегося в одном направлении	$L_{\text{тела 1}} = (v_{\text{тела 1}} - v_{\text{тела 2}}) \cdot t - L_{\text{тела 2}}$	Тело 1 — обгоняющее тело. Его скорость больше. Тело 2 — обгоняемое тело. Его скорость меньше.
Движение вдоль другого протяженного тела, движущегося в разных направлениях	$L_{\text{тела 1}} = (v_{\text{тела 1}} + v_{\text{тела 2}}) \cdot t - L_{\text{тела 2}}$	

С. ШЕСТАКОВ,
И. ЯЩЕНКО,
г. Москва

ОГЭ-2018: ЧАСТЬ II
ГЕОМЕТРИЯ. ЗАДАНИЕ 26

Последнее, 26-е задание ОГЭ по математике представляет собой планиметрическую задачу на вычисление, более сложную по сравнению с задачей 24. Последнюю можно рассматривать как своего рода подготовительную задачу: многие идеи и методы, необходимые для ее решения, используются и при решении задания 26. Большая часть задач связана с окружностью. Рассмотрим типичные примеры.

Треугольники

Пример 1. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 12. Найдите стороны треугольника ABC.

Решение. Пусть P — точка пересечения отрезков BE и AD (рис. 1).

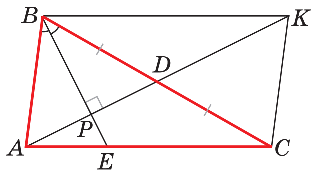


Рис. 1

Треугольник ABD равнобедренный, так как его биссектриса BP является высотой. Поэтому

$$AP = PD = 6,\ BC = 2BD = 2AB.$$

По свойству биссектрисы треугольника ABC

$$\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} = 2,$$

откуда

$$AC = 3AE.$$

Проведем через вершину B прямую, параллельную AC. Пусть K — точка пересечения этой прямой с продолжением медианы AD. Тогда

$$BK = AC = 3AE.$$

Из подобия прямоугольных треугольников APE и KPB следует, что

$$\frac{PE}{BP} = \frac{AE}{BK} = \frac{1}{3}.$$

Поэтому

$$PE = 3 \text{ и } BP = 9.$$

Следовательно,

$$AB = \sqrt{AP^2 + BP^2} = 3\sqrt{13},\ \ BC = 2AB = 6\sqrt{13},$$

$$AE = \sqrt{AP^2 + EP^2} = 3\sqrt{5},\ \ AC = 3AE = 9\sqrt{5}.$$

Ответ: $3\sqrt{13},\ 6\sqrt{13},\ 9\sqrt{5}$.

Пример 2. Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P.

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

Найдите отношение площади треугольника ABK к площади четырехугольника $KPCM$.

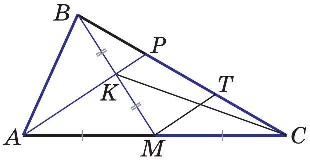


Рис. 2

Решение. Проведем прямую MT параллельно стороне AP. Тогда MT — средняя линия треугольника APC и $CT = TP$, а KP — средняя линия треугольника BMT и $TP = BP$. Обозначим площадь треугольника BKP через S. Тогда площадь треугольника KPC, имеющего ту же высоту и вдвое большее основание, равна $2S$. Значит, площадь треугольника CBK равна $3S$ и равна площади треугольника CMK, которая, в свою очередь, равна площади треугольника AMK. Площадь треугольника ABK равна площади треугольника AMK. Итак,

$$S_{BKP} = S,\ S_{KPC} = 2S,$$
$$S_{CMK} = 3S = S_{AMK} = S_{ABK},\ S_{KPCM} = 5S.$$

Значит,

$$S_{ABK} : S_{KPCM} = 3 : 5.$$

Ответ: 3 : 5.

Пример 3. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC втрое больше длины стороны AB. Найдите отношение площади треугольника ABK к площади треугольника ABC (рис. 3).

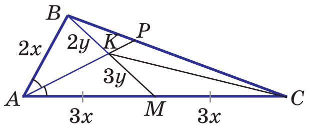


Рис. 3

Решение. Пусть

$$AM = MC = 3x,$$

тогда

$$AB = 2x.$$

Так как AK — биссектриса треугольника ABM, то

$$BK : KM = AB : AM = 2 : 3,$$

а AP — биссектриса треугольника ABC, то

$$BP : PC = AB : AC = 1 : 3.$$

Обозначим площадь треугольника BKP через S. Тогда площадь треугольника KPC, имеющего ту же высоту и втрое большее основание, равна $3S$. Значит, площадь треугольника CBK равна $4S$, а площадь треугольника CMK равна $6S$ и равна площади треугольника AMK. Тогда площадь треугольника ABK равна $4S$. Итак,

$$S_{BKP} = S,\ S_{KPC} = 3S,$$
$$S_{CMK} = 6S = S_{AMK},\ S_{ABK} = 4S.$$

Значит,

$$S_{ABK} : S_{ABC} = 4S : 20S = 1 : 5.$$

Ответ: 1 : 5.

Четырехугольники

Пример 4. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 19$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 7.

Решение. Пусть KH, KN и KM — перпендикуляры, опущенные из точки K к сторонам AB, BC и AD соответственно (рис. 4).

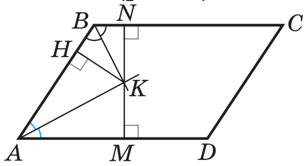


Рис. 4

Тогда $KM = KH = KN = 7$. Кроме того, точки M, K и N лежат на одной прямой, а высота MN параллелограмма $ABCD$ равна

$$MK + KN = 14.$$

По формуле площади параллелограмма находим

$$S_{ABCD} = BC \cdot MN = 19 \cdot 14 = 266.$$

Ответ: 266.

Пример 5. Углы при одном из оснований трапеции равны 77° и 13°, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны соответственно 11 и 10. Найдите длины оснований трапеции.

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, AD — большее основание, K и L — середины сторон AB и CD соответственно. Сумма углов при одном из оснований равна

$$77° + 13° = 90°,$$

так что это большее основание AD. Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке O (рис. 5).

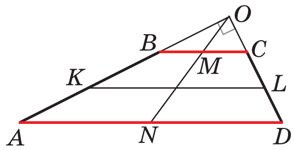


Рис. 5

Легко видеть, что

$$\angle AOD = 180° - (77° + 13°) = 90°.$$

Пусть N — середина основания AD. Тогда

$$ON = \frac{AD}{2}$$

— медиана прямоугольного треугольника AOD. Поскольку медиана ON делит пополам любой отрезок с концами на сторонах AO и DO треугольника AOD и параллельный стороне AD, она пересекает основание BC также в его середине M. Значит,

$$OM = \frac{BC}{2}.$$

Таким образом,

$$MN = \frac{AD - BC}{2}.$$

Средняя линия трапеции при этом равна

$$KL = \frac{AD+BC}{2}.$$

Получаем:

$$AD = MN + KL = 11 + 10 = 21,$$
$$BC = KL - MN = 11 - 10 = 1.$$

Ответ: 21; 1.

Пример 6. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 40 и 41, а основание BC равно 16. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

Решение. Пусть M — середина стороны AB (рис. 6).

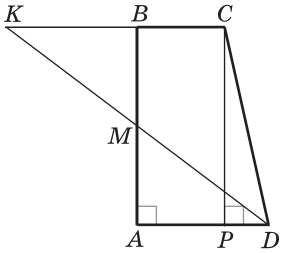


Рис. 6

Продолжим биссектрису DM угла ADC до пересечения с продолжением основания BC в точке K. Поскольку

$$\angle CKD = \angle ADK = \angle CDK,$$

треугольник KCD равнобедренный,

$$KC = CD = 41,$$

тогда

$$KB = KC - BC = 41 - 16 = 25.$$

Из равенства треугольников AMD и BMK следует, что

$$AD = BK = 25.$$

Проведем через вершину C прямую, параллельную стороне AB, до пересечения с основанием AD в точке P, тогда

$$PD = AD - AP = 25 - 16 = 9.$$

Треугольник CPD прямоугольный, так как

$$CD^2 = 41^2 = 40^2 + 9^2 = DC^2 + PD^2.$$

Поэтому CP — высота трапеции. Следовательно,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD+BC)CP = 820.$$

Ответ: 820.

Окружности

Пример 7. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB = 84$, $AC = 98$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите длину отрезка CD.

Решение. Пусть продолжение отрезка BD за точку D пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке P (рис. 7).

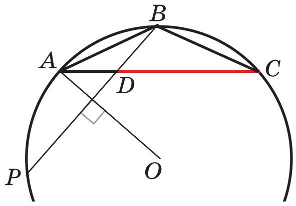


Рис. 7

Тогда хорда BP перпендикулярна радиусу OA этой окружности. Значит, точка A — середина дуги BP, не содержащей вершину C. Отсюда следует, что

$$\angle ABD = \angle ABP = \angle ACB$$

как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги. Поэтому треугольники ABD и ACB подобны по двум углам (угол A — общий). Следовательно,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC},$$

откуда

$$AD = \frac{AB^2}{AC} = 72,$$

$$CD = AC - AD = 98 - 72 = 26.$$

Ответ: 26.

Пример 8. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведенную из вершины B, в отношении 5 : 3, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 8$.

Решение. Пусть BH — высота треугольника, которую биссектриса пересекает в точке O (рис. 8).

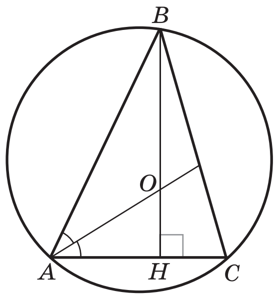


Рис. 8

По теореме о биссектрисе в треугольнике ABH имеем:

$$\frac{BA}{AH} = \frac{BO}{OH} = \frac{5}{3}.$$

Следовательно,

$$\cos A = \frac{AH}{AB} = \frac{3}{5},$$

тогда

$$\sin A = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

По теореме синусов для треугольника ABC искомый радиус равен

$$\frac{BC}{2\sin A} = \frac{8\cdot 5}{2\cdot 4} = 5.$$

Ответ: 5.

Решение. Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (рис. 9).

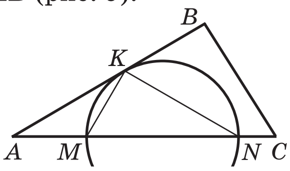


Рис. 9

По теореме о касательной и секущей

$$AK^2 = AM \cdot AN = 4 \cdot 15 = 60.$$

По теореме косинусов

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK\cos\angle BAC =$$

$$= 16 + 60 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{60} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 16.$$

Значит, $KM = 4$.

Треугольник AKM равнобедренный, поэтому

$$\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC.$$

По теореме об угле между касательной и хордой

$$\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC.$$

Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K. По теореме синусов

$$R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{4}{2\sqrt{1 - \frac{15}{16}}} = 8.$$

Ответ: 8.

Пример 10. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 49$, $MD = 42$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите длину отрезка AH.

Решение. Пусть окружность с диаметром BC вторично пересекается с прямой AC в точке K (рис. 10).

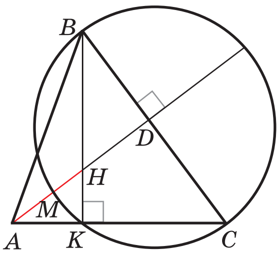


Рис. 10

Поскольку BK — высота остроугольного треугольника ABC, то точка K лежит на стороне AC, а точка H лежит на отрезке BK.

Продолжим высоту AD за точку D до пересечения с окружностью в точке Q. Тогда

$$DQ = MD = 42.$$

По следствию из теоремы о касательной и секущей

$$AK \cdot AC = AM \cdot AQ = 7 \cdot 91 = 637.$$

Из подобия прямоугольных треугольников AKH и ADC следует, что

$$\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC},$$

откуда

$$AK \cdot AC = AD \cdot AH = 49AH.$$

Значит,

$$49AH = 637,\ AH = 13.$$

Ответ: 13.

Пример 11. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 5, 4 и 3. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Решение. Пусть окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC в точках M, L и K соответственно (рис. 11), H — проекция точки O на прямую AD (точка H может лежать либо на стороне AD, либо на ее продолжении).

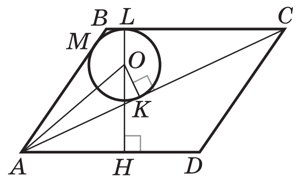


Рис. 11

Тогда

$$OL = OK = 3,$$

точки O, L и H лежат на одной прямой, HL — высота параллелограмма $ABCD$,

$$HL = OL + OH = 3 + 4 = 7.$$

Из прямоугольного треугольника AOK находим, что

$$AK = \sqrt{OA^2 - OK^2} = 4.$$

Пусть p и S — полупериметр и площадь треугольника ABC, $r = 3$ — радиус окружности, вписанной в него. Обозначим $BC = x$. Тогда

$$p = AK + CL + BM = AK + CL + BL =$$

$$= AK + BC = 4 + x,$$

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot HL = \frac{1}{2}x \cdot 7 = 3{,}5x,$$

$$S = p \cdot r = 3(4 + x).$$

Из уравнения

$$3{,}5x = 3(4 + x)$$

находим, что

$$BC = x = 24.$$

Следовательно,

$$S_{ABCD} = 2S = 2pr = 168.$$

Ответ: 168.

Пример 12. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 14$, $BC = 12$.

Решение. Пусть T — точка пересечения прямых AB и CD, P — проекция точки E на прямую CD, Q — проекция точки C на прямую AD (рис. 12).

Обозначим $CD = x$. Поскольку $QD = AD - AQ = AD - BC = 2$, из подобия прямоугольных треугольников TBC и CQD находим, что $TC = 6x$.

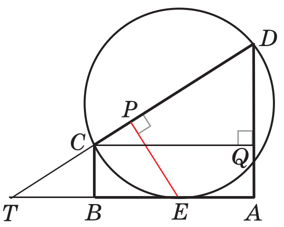


Рис. 12

По теореме о касательной и секущей

$$TE^2 = TD \cdot TC = 42x^2.$$

Из подобия прямоугольных треугольников TPE и TBC имеем:

$$EP = \frac{BC \cdot TE}{TC} = \frac{12 \cdot x\sqrt{42}}{6x} = 2\sqrt{42}.$$

Ответ: $2\sqrt{42}$.

Пример 13. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 49 и 21, а сумма углов при основании AD равна 90°. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если $AB = 20$.

Решение. Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке P (рис. 13).

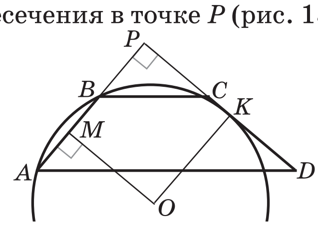


Рис. 13

Из условия следует, что $\angle APD = 90°$. Из подобия треугольников APD и BPC получаем, что

$$\frac{BP}{AP} = \frac{BC}{AD}, \quad \frac{BP}{BP+20} = \frac{21}{49}, \; BP = 15.$$

Пусть окружность касается прямой CD в точке K, а O — ее центр. Опустим перпендикуляр OM на хорду AB. Точка M — середина AB. Так как $OMPK$ — прямоугольник, находим радиус:

$$OK = MP = BP + \frac{1}{2}AB = 15 + 10 = 25.$$

Ответ: 25.

Пример 14. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 120, а площадь равна 540, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до ее меньшего основания.

Решение. Пусть BC — меньшее основание, AB — боковая сторона, AD — большее основание трапеции $ABCD$, M — точка касания окружности со стороной AB, N — со стороной BC, Q — точка пересечения диагоналей, O — центр окружности, r — ее радиус (рис. 14).

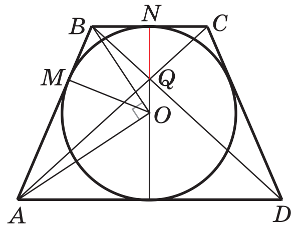


Рис. 14

Поскольку трапеция описана около окружности, то сумма ее боковых сторон равна сумме оснований, то есть 60, поэтому

$$S_{ABCD} = 2r \cdot \frac{AD+BC}{2} = 60r.$$

Значит, $r = 9$.

Прямые AD и BC параллельны. Значит,

$$\angle ABC + \angle BAD = 180°.$$

Поскольку лучи AO и BO — биссектрисы углов BAD и ABC соответственно, получаем:

$$\angle ABO + \angle BAO = 90°.$$

Значит, треугольник AOB прямоугольный, а OM — его высота, опущенная на гипотенузу, поэтому:

$$AM \cdot MB = OM^2 = r^2, \; AM(AB - AM) = r^2,$$
$$AM(30 - AM) = 81.$$

Учитывая, что $AM > BM$, из последнего уравнения находим, что $AM = 27$. Тогда

$$AD = 54, \; BC = 6.$$

Треугольник AQD подобен треугольнику CQB с коэффициентом подобия 9, значит, высота QN треугольника BQC составляет $\frac{1}{10}$ высоты трапеции, то есть равна диаметру вписанной в нее окружности. Следовательно,

$$QN = \frac{1}{10} \cdot 18 = 1{,}8.$$

Ответ: 1,8.

Пример 15. Середина M стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите AD, если $BC = 10$, а углы B и C четырехугольника равны соответственно 112° и 113°.

Решение. Условие задачи означает, что четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром M, а AD — ее диаметр (рис. 15).

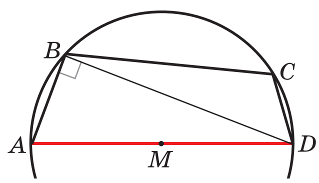


Рис. 15

Так как сумма противоположных углов вписанного четырёхугольника равна 180°, получаем, что $\angle DAB = 67°$ и $\angle ADC = 68°$. Угол ABD прямой, так как опирается на диаметр, поэтому

$$\angle ADB = 90° - 67° = 23°,$$

откуда

$$\angle CDB = 68° - 23° = 45°.$$

По теореме синусов для треугольника CDB:

$$AD = \frac{BC}{\sin 45°} = 10\sqrt{2}.$$

Ответ: $10\sqrt{2}$.

Пример 16. Четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 25$ и $CD = 16$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K, причем $\angle AKB = 60°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырехугольника.

Решение. Через точку B проведем хорду BM, параллельную диагонали AC (рис. 16).

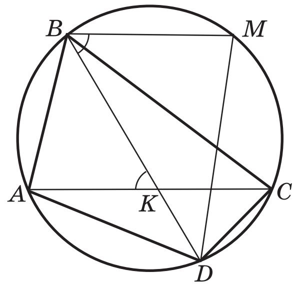


Рис. 16

Тогда

$$CM = AB = 25,\ \angle DBM = \angle AKB = 60°.$$

Четырехугольник $BMCD$ вписанный:

$$\angle DCM = 180° - \angle DBM = 180° - 60° = 120°.$$

По теореме косинусов

$$DM = \sqrt{CM^2 + CD^2 - 2CM \cdot CD \cos\angle DCM} = \sqrt{1281}.$$

По теореме синусов радиус окружности равен

$$\frac{DM}{2\sin\angle DBM} = \frac{\sqrt{1281}}{\sqrt{3}} = \sqrt{427}.$$

Ответ: $\sqrt{427}$.

Пример 17. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник BCP, равен 8 см, тангенс угла BAC равен $\frac{4}{3}$. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

Решение. Обозначим радиусы вписанных окружностей треугольников ABC, BCP и ACP через r, r_1 и r_2 соответственно (рис. 17).

Треугольники ABC, CBP и ACP подобны по двум углам. Поэтому отношение сходственных элементов любых двух из этих треугольников равно соответствующему коэффициенту подобия, то есть отношению сходственных сторон.

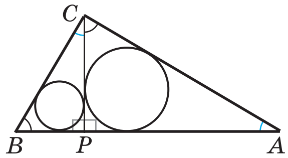


Рис. 17

Значит,

$$\frac{r_1}{r} = \frac{BC}{AB},\ \frac{r_2}{r} = \frac{AC}{AB},\ \frac{r_1}{r_2} = \frac{BC}{AC} = \operatorname{tg}\angle BAC = \frac{4}{3}.$$

Возведя в квадрат и почленно сложив два первых равенства, получим:

$$\frac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = 1,\ r^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

Но

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3},\ r_2 = \frac{3}{4} r_1 = 6.$$

Тогда

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ см}.$$

Ответ: 10 см.

Пример 18. Окружности радиусов 25 и 100 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Решение. Пусть O и O_1 — центры первой и второй окружностей соответственно (рис. 18).

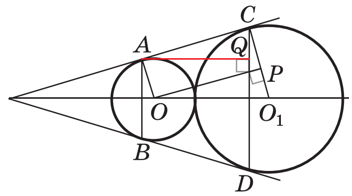


Рис. 18

Линия центров касающихся окружностей проходит через их точку касания, поэтому расстояние между центрами окружностей равно сумме их радиусов, то есть 125.

Опустим перпендикуляр OP из центра меньшей окружности на радиус O_1C второй окружности. Тогда

$$O_1P = O_1C - PC = O_1C - OA = 100 - 25 = 75.$$

Из прямоугольного треугольника OPO_1 находим, что $OP^2 = 10\,000$, а так как четырехугольник $AOPC$ — прямоугольный, то $AC = OP$.

Опустим перпендикуляр AQ из точки A на прямую CD, тогда

$$\angle O_1OP = 90° - \angle OO_1P =$$
$$= \angle O_1CD = 90° - \angle ACQ = \angle CAQ.$$

Прямоугольные треугольники AQC и OPO_1 подобны по острому углу, поэтому

$\frac{AQ}{AC} = \frac{OP}{OO_1}$. Следовательно, $AQ = \frac{OP \cdot AC}{OO_1} = \frac{OP^2}{OO_1} = 80.$

Ответ: 80.

Упражнения

1. Найдите углы треугольника ABC, если из следующих четырех утверждений о нем три истинны, а одно ложно:

1) треугольник ABC равнобедренный;

2) треугольник ABC прямоугольный;

3) сумма двух любых углов треугольника ABC меньше $132°$;

4) один из углов треугольника ABC равен $80°$.

2. В треугольнике ABC биссектриса BE и медиана AD перпендикулярны и имеют одинаковую длину, равную 16. Найдите стороны треугольника ABC.

3. Через середину K медианы BM треугольника ABC и вершину A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке P. Найдите отношение площади треугольника BKP к площади треугольника AKM.

4. Медиана BM и биссектриса AP треугольника ABC пересекаются в точке K, длина стороны AC втрое больше длины стороны AB. Найдите отношение площади треугольника BKP к площади треугольника AKM.

5. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 11$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 3.

6. Углы при одном из оснований трапеции равны $47°$ и $43°$, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон трапеции, равны 16 и 14. Найдите длины оснований трапеции.

7. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны соответственно 10 и 26, а основание BC равно 1. Биссектриса угла ADC проходит через середину стороны AB. Найдите площадь трапеции.

8. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если из четырех следующих утверждений о нем три истинны, а одно ложно:

1) $ABCD$ — квадрат;

2) $ABCD$ — трапеция с тремя равными сторонами;

3) периметр четырехугольника $ABCD$ равен 52 см;

4) сумма длин трех сторон четырехугольника $ABCD$ на 8 см больше длины его четвертой стороны.

9. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB = 40$, $AC = 64$, точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Прямая BD, перпендикулярная прямой AO, пересекает сторону AC в точке D. Найдите длину отрезка CD.

10. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведенную из вершины B, в отношении $5 : 3$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 16$.

11. Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 12 и 21 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

12. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 6$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите длину отрезка AH.

13. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ AC. Точка O является центром окружности, вписанной в треугольник ABC. Расстояния от точки O до точки A и прямых AD и AC соответственно равны 13, 7 и 5. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

14. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 8$, $BC = 4$.

15. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 18 и 6, а сумма углов при основании AD равна $90°$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся прямой CD, если $AB = 10$.

16. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 200, а площадь равна 1500, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до ее меньшего основания.

17. Середина M стороны AD выпуклого четырехугольника $ABCD$ равноудалена от всех его вершин. Найдите длину стороны AD, если $BC = 12$, а углы B и C четырехугольника равны соответственно $115°$ и $95°$.

18. Четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 5$ и $CD = 17$ вписан в окружность. Диагонали AC и BD пересекаются в точке K, причем $\angle AKB = 60°$. Найдите радиус окружности, описанной около этого четырехугольника.

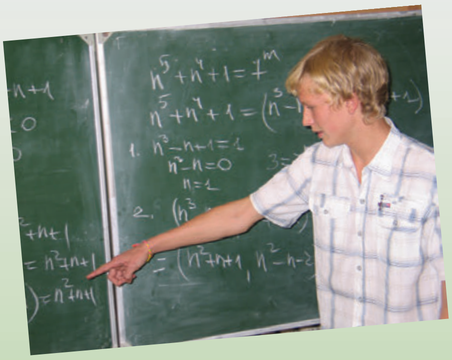
19. Из вершины прямого угла C треугольника ABC проведена высота CP. Радиус окружности, вписанной в треугольник ACP, равен 4 см, тангенс угла BAC равен 0,75. Найдите радиус вписанной окружности треугольника ABC.

20. Окружности радиусов 45 и 55 касаются внешним образом. Точки A и B лежат на первой окружности, точки C и D — на второй. При этом AC и BD — общие касательные окружностей. Найдите расстояние между прямыми AB и CD.

Ответы: **1.** $50°, 50°, 80°$. **2.** $4\sqrt{13}$, $8\sqrt{13}$, $12\sqrt{5}$. **3.** 1 : 3. **4.** 1 : 6. **5.** 66. **6.** 30; 2. **7.** 130. **8.** 128 см^2. **9.** 39. **10.** 10. **11.** 8. **12.** 5. **13.** 720. **14.** $4\sqrt{2}$. **15.** 10. **16.** 3. **17.** $8\sqrt{3}$. **18.** $\sqrt{133}$. **19.** 5 см. **20.** 99

ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ С ОДАРЕННЫМИ ДЕТЬМИ

О. НОВОСЕЛОВА,
г. Киров



Не существует сколь-нибудь достоверных тестов на одаренность, кроме тех, которые проявляются в результате активного участия хотя бы в самой маленькой поисковой исследовательской работе.
А. Колмогоров

В национальной образовательной инициативе «Наша новая школа», утвержденной Президентом РФ, одним из основных направлений развития общего образования является развитие системы поддержки талантливых детей. Основная идея состоит в том, что одновременно с реализацией стандарта общего образования должна быть выстроена разветвленная система поиска и поддержки талантливых детей, а также их сопровождение в течение всего периода становления личности.

Какими же особенностями обладают одаренные дети?

Бытует мнение, что одаренные дети не нуждаются в помощи взрослых, в особом внимании и руководстве. Но не следует забывать, что в силу личностных особенностей такие дети наиболее чувствительны к оценке своей деятельности, поведения и мышления, они более восприимчивы к сенсорным стимулам и лучше понимают отношения и связи.

Следует помнить также, что как бы ни был одарен ребенок, его нужно учить. Важно приучить к усидчивости, приучить трудиться, самостоятельно принимать решения. Одаренный ребенок не терпит давления, притеснений, окриков, что может вылиться в проблему. Для развития своих талантов одаренные дети должны свободно распоряжаться временем и пространством, обучаться по расширенному учебному плану и чувствовать индивидуальную заботу и внимание со стороны своего учителя.

Одаренных детей отличает исключительная успешность обучения. Эта черта связана с высокой скоростью переработки и усвоения информации. Но одновременно с этим такие дети могут быстро утрачивать интерес к ежедневным кропотливым занятиям. Работать с ними интересно и трудно; в классе, на уроке они требуют особого подхода, особой системы обучения. Часто про одаренных детей говорят, что в них есть «искра Божия», но чтобы из этой искры возгорелось пламя, а применительно к науке это пламя таланта, нужно приложить немалые усилия.

Работа с одаренными детьми

Определив таких ребят, нужно научить их думать и предпринимать все возможное для развития их способностей. Главным помощником в этом деле является интерес учащихся к предмету.

Для учеников 5–6-х классов я предлагаю нестандартные задачи по математике. Каждую неделю учащиеся получают распечатку из восьми задач, из которых 2–3 простые, то есть любой ученик может их решить. Решение задач дети записывают в отдельной тетради, каждая задача располагается на отдельной странице. В конце недели ученики сдают тетради на проверку. Решение каждой задачи оценивается в 1 балл. За оригинальность, за наличие нескольких способов решения стоимость задачи может быть увеличена.

Через неделю после проверки происходит разбор задач. Особое внимание уделяю разбору тех задач, где актуализируются знания учащихся на основе уже решенных задач, и задач, имеющих несколько способов решения. При этом обязательно называю фамилии ребят, чьи решения были наиболее интересными и кто набрал наибольшее количество баллов. Разбор задач происходит на занятии кружка, а при его отсутствии — на уроках, по одной-две задачи ежедневно во время устной работы.

Таким образом, систематическое решение и обсуждение нестандартных задач становится деятельностью, привычной для школьников, дети начинают верить в свои силы.

В старших классах особый интерес у учащихся вызывают задачи, решаемые разными способами. Например, требуется решить уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$. В процессе работы над ним мы находим целых шесть способов его решения:

– разложение на множители;

– выделение квадрата двучлена;

– с помощью формулы корней квадратного уравнения;

– графический способ;

– с помощью теоремы Виета;

– с помощью зависимости между коэффициентами квадратного уравнения.

Организация поиска способов решения задачи создает условия для формирования навыков исследовательской деятельности, способствует накоплению творческого потенциала школьника.

Таким образом, система работы на уроках математики с одаренными детьми включает в себя следующие компоненты:

– изучение материалов, выходящих за рамки школьной программы по математике;

– развитие логического мышления и интуиции учащихся при решении задач и примеров;

– знакомство с различными способами решения задач;

– вовлечение учащихся в серьезную самостоятельную работу по предмету.

Важнейшей формой работы с одаренными детьми являются олимпиады. Они способствуют выявлению наиболее способных и одаренных детей, становлению и развитию образовательных потребностей личности, подготовке учащихся к получению высшего образования, творческому труду в разных областях, научной и практической деятельности.

Какие проблемы существуют в работе с одаренными детьми?

К сожалению, еще очень мало сделано для детей, превосходящих свою возрастную норму в различных отношениях.

Считаю, что недостаточно внимания уделяется работе с родителями одаренных учеников. Все наши силы направлены на работу с родителями слабых учеников. И это, конечно, тоже важная часть нашей работы. Но родители именно способных учеников могут стать нашими первыми помощниками и единомышленниками, если дать им четкие рекомендации: как сделать так, чтобы начальный интерес к математике не угас, чтобы настроить детей на упорный труд, в какие моменты необходим контроль.

Возможно, было бы не лишним, если бы мы использовали наглядную агитацию: стенды с фотографиями наших лучших математиков, с материалами о наших бывших выпускниках, достигших успехов в дальнейшей учебе и работе благодаря глубоким знаниям по математике, полученным в нашей школе. А по большому счету, необходима специальная программа для работы с одаренными детьми.

В заключении хочу сказать, что, конечно, перечислить все формы и методы при работе с одаренными детьми невозможно. Педагогический опыт показывает, что вера в возможности ученика, помноженная на мастерство родителей и педагогов, способна творить педагогические чудеса. В жизни часто оказывается важно не то, что дала человеку природа, а то, что он сумел сделать с тем даром, который у него есть. А при всех существующих трудностях в системе общего среднего образования сегодня открываются новые возможности для развития личности учащегося и одаренной личности в частности.

Закончить свою статью мне хочется словами: «Мы, взрослые, должны быть для ребенка и плодородной почвой, и живительной влагой, и теплым солнышком, согревающим цветок детской души. Только тогда раскрываются уникальные способности, данные каждому ребенку от рождения».

Литература

1. *Аверина И.С.* Вербальный тест творческого мышления «Необычное использование» Дж. Гилфорда. — НИЦ «Когито», 1996. **2.** *Айзенк Г. Дж.* Узнай свой собственный коэффициент интеллекта. — Б. м.: Ай Кью, 1993. **3.** *Грязева В.Г., Петровский В.А.* Одаренность детей: выявление, развитие и поддержка. — Челябинск: Учитель, 2008. **4.** *Панов В.И.* Некоторые теоретические и психологические аспекты одаренности // Прикладная психология, 1998, № 3. **5.** *Хамидуллина Л.В.* Личностно ориентированное обучение одаренных учащихся на уроках математики // Человек и образование, 2012, № 4 (33).

Л. АММОСОВА,
г. Якутск,
Республика Саха (Якутия)

Математическое образование, получаемое в общеобразовательной школе, является важнейшим компонентом общего образования и общей культуры современного человека. Требования, предъявляемые программой по математике, рассчитаны на так называемого «среднего» ученика. В любом классе есть самый способный ученик, который легко и с интересом усваивает программный материал по математике, и самый отстающий ученик, тот, кому изучение предмета дается с большим трудом. Все это приводит к индивидуализации. Задача учителя — своевременно выявить способности учащихся и вести работу с дифференцированным подходом.

Одной из задач внутри нашего класса является выявление одаренных детей, и очень важно в течение всех учебных лет не потерять данных учащихся, способствовать их развитию и успешности.

Одаренными и талантливыми детьми можно назвать тех, кто, по оценке специалистов, в силу своих способностей демонстрирует высокие достижения в одной или нескольких сферах:
- интеллектуальной;
- творческо-продуктивного мышления;
- академических достижений (дети, которые хорошо учатся в школе);
- общения и лидерства;
- художественной деятельности.

Создание условий для развития одаренных, а также просто способных детей является одним из главных направлений работы в нашем классе:
- организация учебного процесса;
- внеурочная деятельность;
- интеллектуальные конкурсы;
- школьные научно-практические конференции;
- городские, региональные, всероссийские олимпиады, конкурсы.

Все охватить во время учебного процесса невозможно. Только внеурочная деятельность может способствовать расширению знаний по математике, она создает благоприятные условия для развития творческой самостоятельности и мышления ученика.

Целью внеурочной деятельности является развитие мышления учащихся, интереса к изучению математики, привитие учащимся интереса и вкуса к самостоятельным занятиям математикой, воспитание и развитие их инициативы и творчества.

В классах среднего звена, где я преподаю математику, занятия со способными детьми в основном осуществляются через внеурочную деятельность. Это кружки по математике, консультации. Небольшие доклады, презентации, зачеты, экзамены, конкурсы нестандартных задач, разбор самостоятельно подготовленных к занятию занимательных задач — это первые творческие шаги и проявление интереса к математике детей среднего возраста. Начиная с 5-го класса веду кружок по математике, где изучается школьная тематика с углублением, например, такие темы: «Принцип Дирихле», «Четность», «Задачи на разрезание», «Логика», «Переливание», «Комбинаторика», «Перекладывание спичек, кроссворды, ребусы» и т.д.

На уроках особое внимание уделяю устному счету и решению текстовых задач, а на кружках рассматриваю задачи олимпиадного характера.

Как классный руководитель большую разъяснительную работу провожу с родителями. Поставленные цели будут достигнуты только тогда, когда в одной связке сотрудничают ученик, учитель, классный руководитель и родитель. Когда родитель доверяет и поддерживает учителя, то многие задачи решаются легко.

В 7-м классе особое место в изучении математики занимает геометрия. Именно в 7-м классе закладывается умение доказывать теоремы и решать геометрические задачи. Чтобы повысить интерес и дать более глубокие знания, решаю с учениками «красивые задачи» из различных источников, например, из книги Гордина Р.К. «Планиметрия. Задачник. 7–9 классы».

В 8-м классе по геометрии рассматриваю темы «Теорема Стюарта», «Теорема Чевы и Менелая»; данные теоремы позволяют некоторые задачи решать более рациональным путем, и задача становится не такой сложной.

Начиная с 8-го класса убеждаю родителей, дети которых проявляют интерес к математике, записать их дополнительно в Школу олимпиад. В этом направлении я вижу очень много плюсов: другой преподаватель, другое учреждение, другая методика.

С каждым классом обзор направлений идет по нарастающей. Подбор задач, примеров, учебных пособий обеспечивает проведение занятий на высоком уровне. Интерес к изучаемым предметам проявляется участием в олимпиадах различных уровней, конкурсах, конференциях, что обеспечивает формирование аналитического и критического мышления, развитие познавательных компетенций школьников.

Г. ГАБИБУЛАЕВ,
А. АСКЕРОВ,
г. Махачкала, Республика Дагестан

Используя опыт передовых центров по работе с одаренными детьми России, учебный центр «Надежда» составил свою программу работы с одаренными детьми. Для проведения работы с одаренными детьми необходимо вести работу по нескольким основным направлениям:

– поддержка регулярной кружковой работы со школьниками с охватом как можно большего числа городов и районов Республики Дагестан;

– организация и проведение республиканских олимпиад;

– проведение республиканских сборов со школьниками 6–11-х классов;

– организация, проведение и привлечение одаренных детей 5–11-х классов к обучению в республиканских летних математических школах;

– программа подготовки учителей-тренеров.

В центре «Надежда» работают четыре кружка: в Махачкале, в Дербенте, в Каспийске и в селении Касумкент. Кружки играют огромную роль в выявлении талантов среди способных школьников. Они приучают детей к регулярной, систематической, трудной и тем не менее интересной работе над сложными темами олимпиадной математики, над поиском решений задач повышенной сложности. Обучаясь в кружке, одаренный школьник приобретает знания и навыки решения сложных и нестандартных задач.

Учебная программа работы кружков рассчитана на несколько лет обучения. Основной упор делается на выявление способных и талантливых детей, начиная с 5-го класс. С ними во время обучения отрабатываются базовые темы олимпиадной математики, им прививаются навыки труда и самостоятельной творческой деятельности. К 7-му классу они должны многое уметь и понимать, так как именно с 7-го класса школьники принимают участие в серьезных республиканских и всероссийских математических олимпиадах и турнирах. В 8-м классе они должны владеть навыками решения многих классических и нестандартных олимпиадных задач, чтобы быть успешными участниками престижных соревнований. А начиная с 9-го эти навыки совершенствуются и охватывается широкий спектр приемов и методов решения олимпиадных задач.

Одаренные дети, как правило, обучаются в различных учебных заведениях, разбросанных по всей республике. Большую роль в выявлении талантов играют проводимые центром олимпиады и турниры.

Республиканская олимпиада по математике «Пифагор» для 5–11-х классов проводится в начале учебного года. Олимпиада имеет целью профориентационную работу и раннее выявление, развитие и поддержку математически одаренных школьников, с дальнейшей организацией с ними целенаправленной работы на факультете математики, физики и информатики ДГПУ. В 2017 году прошла уже пятая олимпиада. От одного района в олимпиаде могут принимать участие до 4–5 школьников из каждой параллели классов. От городов же в олимпиаде могут участвовать по 2 учащихся от параллели каждого класса из одного учреждения. Для учащихся 5–7-х классов отведено 3 часа на решение заданий олимпиады, для учащихся 8–11-х классов — 4 часа.

Республиканская олимпиада по математике им. П.Л. Чебышева для 5–7-х классов. Цель олимпиады: выявление математически одаренных учащихся, развитие их творческих способностей и интереса к научно-исследовательской деятельности, а также создание необходимых условий для поддержки одаренных детей и пропаганда научных знаний. Соревнования проводятся в три тура: школьный, зональный и республиканский. В седьмой олимпиаде приняли участие около 6500 школьников. Популярность олимпиады растет, поэтому появился четвертый этап — заключительный, который был разработан совместно с краснодарским математическим центром «Бернулли».

Олимпиада по математике «Шаг в науку» для 5–11-х классов. Олимпиада проводится с целью стимулирования самостоятельной творческой деятельности учащихся, повышения их познавательной активности, выявления одаренных детей, проявляющих повышенный интерес к решению олимпиадных задач. В 2017 году прошла одиннадцатая олимпиада, в ней приняли участие 320 детей. Проводится она в два этапа. В первом туре могут участвовать все желающие, имеющие интерес к математике. Победителем считается участник, набравший не менее 50% баллов. Во второй тур олимпиады допускаются победители первого тура и приглашаются ученики, участвовавшие в других олимпиадах по математике. Победители определяются в каждой возрастной группе. Каждая задача на всех этапах оценивается в 7 баллов. Олимпиада играет важную роль как для учителей математики, желающих начать работу со своими учениками, так и для школьников, которые только знакомятся с олимпиадными задачами или уже занимаются в кружках.

Все три организованные и проводимые центром олимпиады стали за эти годы поистине народными и любимыми и охватили более 600 районных и городских школ Республики Дагестан.

А. БЛИНКОВ,
г. Москва

КРУЖОК ПО ГЕОМЕТРИИ

Использован материал из книги: *Блинков А.* Классические средние в арифметике и геометрии (серия «Школьные математические кружки»). — М.: МЦНМО, 2012.

Занятие 9. Равносторонний треугольник и две окружности

Основу этого занятия составляет цепочка задач, связанных с одной и той же геометрической конфигурацией, придуманной Ю. Зайцевой, А. Соколовым и Д. Швецовым.

Для успешного освоения материала занятия достаточно базовых сведений школьного курса геометрии и освоения материала, связанного с движениями на плоскости и гомотетией (см. занятия 3 и 4 для 9-го класса).

Рассмотрим одну интересную геометрическую конструкцию.

Через вершину B равностороннего треугольника ABC проведена прямая l, не пересекающая сторону AC. Вне треугольника построены две окружности с центрами P и Q: одна из них касается стороны BC, прямых l и AC, а другая касается стороны BA, прямых l и AC (рис. 1).

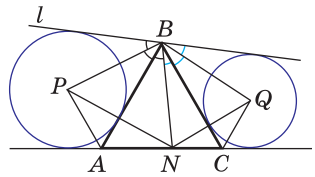


Рис. 1

Основной факт, который можно будет использовать при решении задач: *треугольник PBQ — равнобедренный*. Докажем это.

Доказательство. Проведем луч BN, симметричный лучу BP относительно прямой AB, тогда

$$\angle NBA = \angle PBA$$

(точка N лежит на отрезке AC). Так как AP — биссектриса внешнего угла треугольника ABC, который равен $120°$, то

$$\angle BAP = 60° = \angle BAN.$$

Значит, треугольники BAP и BAN равны (по стороне и прилежащим углам), поэтому $BP = BN$.

Заметим теперь, что сумма углов, образованных прямой l со сторонами AB и BC (вне данного треугольника), равна $120°$, значит, сумма их половин равна $60°$. Следовательно,

$$\angle NBC = \angle QBC.$$

Тогда, рассуждая аналогично, получим равенство треугольников BCN и BCQ, откуда $BQ = BN$. Таким образом, $BP = BQ$, то есть треугольник BPQ равнобедренный.

Комментарий. Отметим, что по сути точка Q является образом точки P при повороте с центром B на $120°$, а в процессе решения этот поворот представлен в виде композиции двух осевых симметрий. Обратите внимание еще на одну симметрию: прямые l и AC симметричны относительно прямой PQ — линии центров данных окружностей.

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

Другие свойства этой конфигурации мы получим в процессе решения задач. Рекомендуем решать их примерно в той последовательности, которая предложена.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

Через вершину B равностороннего треугольника ABC проведена прямая l, не пересекающая сторону AC. Вне треугольника проведены две окружности: окружность с центром P, которая касается стороны BA в точке A_1, а также прямых l и AC, и окружность с центром Q, которая касается стороны BC в точке C_1, а также прямых l и AC. Докажите следующее:

1. Прямые PA_1, QC_1 и AC пересекаются в одной точке.

2. Описанная окружность треугольника A_1BC_1 проходит через середину стороны AC.

3. Центр окружности, описанной около треугольника PBQ, лежит на стороне AC.

4. Пусть N — точка пересечения прямых PA_1 и QC_1, O — центр окружности, описанной около треугольника PBQ. Тогда точки P, Q, N и O лежат на одной окружности.

5. Ортоцентр треугольника A_1BC_1 лежит на прямой PQ.

6. Пусть прямая PQ пересекает AB и BC в точках A' и C' соответственно, тогда центр окружности, описанной около треугольника $A'BC'$, лежит на отрезке BN.

7. Пусть описанная окружность треугольника PBQ пересекает прямую l в точке T, тогда точка T лежит на окружности, описанной около треугольника $A'BC'$.

8. а) Высота треугольника ABC равна сумме радиусов данных окружностей.

б) Обобщите этот результат для случая, когда треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$).

Решения задач

1. *Способ I.* Из равенства двух пар треугольников, полученного при решении базовой задачи, следует, что $AB \perp PN$ и $BC \perp QN$, то есть точки A_1 и C_1 лежат на сторонах AB и BC соответственно (рис. 2).

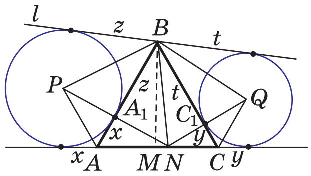


Рис. 2

Значит, прямые PA_1 и QC_1 пересекаются в точке N, лежащей на прямой AC.

Способ II. Введем обозначения длин отрезков касательных, проведенных к окружностям из вершин треугольника (см. рис. 2). Пусть PA_1 и QC_1 пересекаются в точке N. Докажем, что N лежит на стороне AC.

Действительно, так как AP — биссектриса внешнего угла A треугольника ABC, то

$$\angle A_1AP = 60° = \angle A_1AN.$$

Кроме того, $AA_1 \perp PN$, значит, треугольник PAN равнобедренный, то есть

$$AN = AP = 2x$$

(поскольку $\angle A_1PA = 30°$). Аналогично, $CN = 2y$.

Далее, из равенства общих касательных к двум окружностям получим, что

$$x + y + a = z + t,$$

где a — сторона треугольника. Кроме того,

$$x + z + y + t = AB + BC = 2a.$$

Таким образом,

$$x + y + a = 2a - (x + y),$$
$$2x + 2y = a.$$

Это и означает, что точка N лежит на стороне AC.

2. Как уже было доказано, точка N пересечения прямых PA_1 и QC_1 лежит на стороне AC (см. рис. 2). Так как углы BA_1N и BC_1N прямые, то четырехугольник BA_1NC_1 вписанный, то есть точка N лежит также на окружности, описанной около треугольника A_1BC_1, а BN — диаметр этой окружности. Следовательно, из точки M пересечения этой окружности со стороной AC отрезок BN виден под прямым углом, то есть BM — высота данного треугольника. Значит, M — середина стороны AC.

Комментарий. Отметим, что если $l \parallel AC$, то точки M и N совпадают.

3. Рассмотрим отрезок BO, симметричный BN относительно высоты BM треугольника ABC (рис. 3).

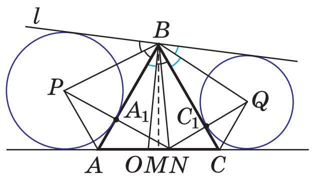


Рис. 3

Так как

$$BO = BN = BP$$

и

$$\angle PBO = \angle PBA + \angle OBA = \angle PBA + \angle NBC = 60°$$

(см. базовую задачу), то треугольник PBO равносторонний, то есть $OB = OP$. Аналогично доказывается, что $OB = OQ$. Значит, O — центр окружности, описанной около треугольника PBQ.

4. *Способ I.* Из доказанного в задаче 3 следует, что

$$BP = BO = BN = BQ.$$

Следовательно, все указанные точки лежат на окружности с центром B.

Способ II. Из доказанного в задаче 3 следует, что

$$\angle POQ = 120°$$

(см. рис. 3). Так как

$$\angle PNA = \angle QNC = 30°,$$

то

$$\angle PNQ = 120°.$$

Таким образом, отрезок PQ виден из точек O и N под равными углами, откуда и следует доказываемое утверждение.

5. По доказанному ранее

$$AB \perp PN \text{ и } BC \perp QN,$$

а точки A_1 и C_1 — середины отрезков PN и QN соответственно (рис. 4).

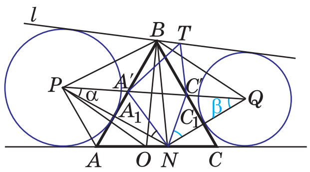


Рис. 4

Значит, высоты треугольника A_1BC_1, проведенные из точек A_1 и C_1, параллельны QN и PN соответственно и каждая из них пересекает отрезок PQ в его середине. Следовательно, их точка пересечения (ортоцентр треугольника A_1BC_1) лежит на PQ.

6. Воспользуемся тем, что BN — диаметр окружности, описанной около треугольника A_1BC_1 (см. задачу 2), и тем, что $A_1C_1 \parallel A'C'$ (см. задачу 5). Тогда существует гомотетия с центром B, которая переводит треугольник A_1BC_1 в треугольник $A'BC'$. При такой гомотетии образами серединных перпендикуляров к сторонам являются соответствующие серединные перпендикуляры, поэтому образом центра окружности, описанной около A_1BC_1, (середины отрезка BN) является точка, лежащая на BN (рис. 5).

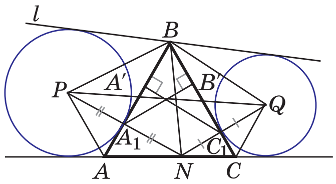


Рис. 5

7. Центром окружности, описанной около треугольника PBQ, является точка O на прямой AC (см. задачу 3). При симметрии относительно прямой PQ образом этой окружности является окружность с центром B, содержащая точки P, O, N и Q (см. задачу 4). Так как прямые AC и l также симметричны относительно PQ, то образом точки T является точка N (см. рис. 4). Образом треугольника $A'BC'$ при этой симметрии является треугольник $A'OC'$, у которого $\angle A'OC' = 60°$, поэтому достаточно доказать, что точка N лежит на окружности, описанной около этого треугольника, то есть доказать, что $\angle A'NC' = 60°$.

Воспользуемся тем, что прямые AA' и CC' являются серединными перпендикулярами к отрезкам PN и QN соответственно (см. задачу 1), тогда

$$\angle A'PN = \angle A'NP = \alpha,$$
$$\angle C'QN = \angle C'NQ = \beta.$$

Так как

$$\angle PNQ = \angle POQ = 120°,$$

то

$$\alpha + \beta = 60°,$$

значит,

$$\angle A'NC' = \angle PNQ - (\alpha + \beta) = 60°,$$

что и требовалось.

8. а) Заметим, что

$$2(x + y) = a$$

(см. способ II решения задачи 1, рис. 2). Тогда радиусы окружностей:

$$R = x\operatorname{ctg} 30° = x\sqrt{3}$$

и

$$r = y\operatorname{ctg} 30° = y\sqrt{3}.$$

Следовательно,

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2(x+y)\sqrt{3}}{2} = R + r,$$

что и требовалось.

б) Сохраним обозначения предыдущего пункта, добавив, что

$$AB = BC = b,$$
$$\angle BAC = \angle BCA = \alpha.$$

Из равенства расстояний между точками касания получим, что

$$x + y + a = z + t.$$

Кроме того,

$$z = b - x,\ t = b - y.$$

Следовательно,

$$x + y = b - 0{,}5a.$$

Тогда

$$R + r = (x+y)\operatorname{ctg} 0{,}5\alpha = \frac{(b-0{,}5a)(1+\cos\alpha)}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{(b-0{,}5a)\left(1+\dfrac{a}{2b}\right)}{\dfrac{h}{b}} = \frac{(b-0{,}5a)(b+0{,}5a)}{h} = \frac{h^2}{h} = h,$$

что и требовалось.

Занятие 10. Разные задачи

На этом занятии вам предлагается подборка задач разной тематики в качестве тренировки. Большинство из них так или иначе связаны с темами, изученными на предыдущих занятиях. Нумерация задач весьма условна с точки зрения их трудности, поэтому можно выбирать любую последовательность их решения.

Предлагаемая подборка задач служит для закрепления идей, разобранных на предыдущих занятиях. *Особенно полезно вернуться к свойствам вписанных углов, использованию ортоцентра треугольника для доказательства перпендикулярности прямых, свойствам точки пересечения биссектрисы треугольника с его описанной окружностью, применению движений, идее «спрямления» для поиска минимума, различным приемам поиска ГМТ и т.д.*

Задачи для самостоятельного решения

1. По горизонтальной прямой s произвольным образом «катаются» две окружности, радиусы которых r и R. К ним проведены две общие внутренние касательные, пересекающиеся в точке M. По какой траектории движется точка M?

2. В параллелограмме $ABCD$ проведены высоты BK и BH, $KH = a$, $BD = b$. Найдите расстояние от вершины B до ортоцентра треугольника BKH.

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O, лежащим внутри четырехугольника. Сумма углов AOB и COD равна 180°. Из точки O опущены перпендикуляры на каждую сторону четырехугольника. Докажите, что сумма длин этих перпендикуляров равна полупериметру $ABCD$.

4. На катетах прямоугольного треугольника выбираются точки P и Q, из которых опускаются перпендикуляры PK и QH на гипотенузу. Найдите наименьшее значение суммы $KP + PQ + QH$, если длины катетов равны a и b.

5. В остроугольном треугольнике ABC ортоцентр H делит высоту CC_1 в отношении $3:1$, считая от вершины. Найдите величину угла AMB, где M — середина этой высоты.

6. На катетах прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACKL$ и $BCMN$. Пусть CE — высота треугольника, опущенная на гипотенузу AB. Докажите, что угол LEM прямой.

7. Найдите ГМ точек, являющихся серединами отрезков с концами на диагоналях данного квадрата.

8. В треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса AL и высота AH. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AL = t$, $AH = h$ и L — середина отрезка MH.

Ответы и решения

1. По прямой, параллельной s и находящейся от нее на расстоянии $\frac{2Rr}{R+r}$.

Пусть A и B — центры данных окружностей; P и T — точки касания окружностей с одной из данных касательных (рис. 1).

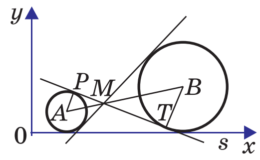


Рис. 1

Так как при гомотетии с центром M одна из окружностей переходит в другую, то точка M лежит на прямой AB. Кроме того,

$$AM : MB = r : R$$

(это соотношение можно также получить из подобия треугольников APM и BTM).

Введем на плоскости декартову систему координат так, чтобы прямая s являлась осью абсцисс. Тогда точка A движется по прямой $y = r$, а точка B — по прямой $y = R$. В этом случае

$$y_M = \frac{R \cdot y_A + r \cdot y_B}{y_A + y_B} = \frac{2Rr}{R+r},$$

то есть ордината точки M постоянна (не зависит от положения окружностей). Следовательно, точка M движется по прямой, параллельной s и находящейся от нее на расстоянии y_M.

Этот же результат можно получить геометрически. Опустим перпендикуляры AD и BC на прямую s (рис. 2).

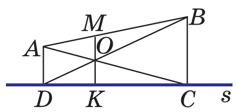


Рис. 2

Пусть диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Длина отрезка MK, содержащего точку O и параллельного основаниям трапеции, является средним гармоническим длин оснований, то есть

$$MK = \frac{2Rr}{R+r}.$$

При этом $MK \perp s$ и

$$AM : MB = AO : OC = AD : BC = r : R,$$

то есть M — точка, заданная в условии задачи.

2. $\sqrt{b^2-a^2}$.

Пусть H' — ортоцентр треугольника BKH (рис. 3).

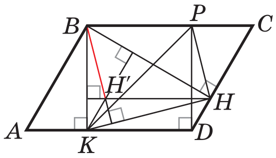


Рис. 3

Так как

$$HH' \perp BK \text{ и } KH' \perp BH,$$

то

$$HH' \parallel AD \text{ и } KH' \parallel CD,$$

то есть $HH'KD$ — параллелограмм.

Рассмотрим параллельный перенос на $\overline{H'H}$: образом точки K является точка D, а образом точки B — некоторая точка P, лежащая на BC. Так как $PD \parallel BK$, то $BPDK$ — прямоугольник, значит,

$$PK = BD = b.$$

Кроме того, так как $BH' \perp KH$, то $PH \perp KH$, причем $PH = BH'$ (по определению параллельного переноса). Таким образом, треугольник PKH прямоугольный, значит,

$$BH' = PH = \sqrt{KP^2 - KH^2} = \sqrt{b^2-a^2}.$$

3. Рассмотрим перпендикуляры OK и OM на стороны AB и CD соответственно (рис. 4 и 5). Они являются медианами и биссектрисами в равнобедренных треугольниках AOB и COD соответственно.

Способ I. Так как

$$\angle AOB + \angle COD = 180°,$$

то

$$\angle KOA + \angle COM = 90°,$$

значит (см. рис. 4),

$$\angle KOA = \angle OCM.$$

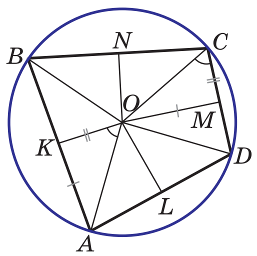


Рис. 4

Следовательно, прямоугольные треугольники KOA и MCO равны (по гипотенузе и острому углу). Тогда

$$OM = AK = \frac{1}{2}AB \text{ и } OK = CM = \frac{1}{2}CD.$$

Так как сумма углов BOC и AOD также равна 180°, то для перпендикуляров к сторонам BC и AD аналогично получим:

$$ON = \frac{1}{2}AD \text{ и } OL = \frac{1}{2}BC.$$

Таким образом,

$$OM + ON + OK + OL = \frac{1}{2}P_{ABCD},$$

что и требовалось.

Способ II. Повернем треугольник COD вокруг центра O на угол BOC. Образами точек C, D и M будут являться точки B, D' и M' соответственно (см. рис. 5).

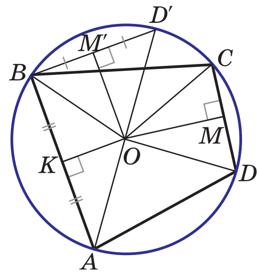


Рис. 5

Так как

$$\angle AOB + \angle COD = \angle AOB + \angle BOD' = 180°,$$

то AD' — диаметр окружности. Тогда OK и OM' — средние линии прямоугольного треугольника ABD', поэтому

$$OK + OM = OK + OM' = \frac{1}{2}(AB + CD).$$

Дальнейшее рассуждение приведено в способе I.

Комментарий. Можно также использовать тригонометрические соотношения в прямоугольных треугольниках.

4. $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $BC = a$, $AC = b$; $P \in BC$, $PK \perp AB$, $K \in AB$ и $Q \in AC$, $QH \perp AB$, $H \in AB$ (рис. 6).

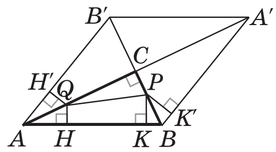


Рис. 6

Рассмотрим симметрию относительно прямой BC: образами точек A и K являются точки K' и A' соответственно. Аналогично, при симметрии относительно прямой AC образами точек B и H соответственно являются точки B' и H'. Получим, что $AB'A'B$ — ромб и

$$KP + PQ + QH = K'P + PQ + QH'.$$

Так как точки K' и H' лежат на параллельных прямых, причем

$$PK' \perp A'B \text{ и } QH' \perp AB',$$

то наименьшее значение полученной суммы достигается тогда и только тогда, когда точки K', P, Q и H' принадлежат общему перпендикуляру к прямым AB' и BA'. Искомое значение суммы в этом случае равно расстоянию между этими прямыми, то есть длине высоты ромба:

$$h_{AB'A'B} = 2h_{ABC} = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

5. 90°.

Способ I. Из условия задачи следует, что $HM = HC_1$ (рис. 7).

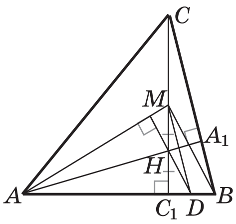


Рис. 7

Пусть D — середина отрезка BC_1, тогда DM — средняя линия треугольника BCC_1, значит, $DM \parallel BC$, поэтому отрезок DM перпендикулярен высоте AA_1 треугольника ABC.

Следовательно, точка H является также и ортоцентром треугольника AMD, значит, прямая DH содержит высоту этого треугольника. Но отрезок DH является средней линией треугольника BMC_1, значит, $DH \parallel BM$, поэтому отрезки AM и BM перпендикулярны.

Способ II. Воспользуемся тем, что точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно сторон, лежат на окружности, описанной около треугольника. Пусть точка E симметрична ортоцентру H относительно AB (рис. 8).

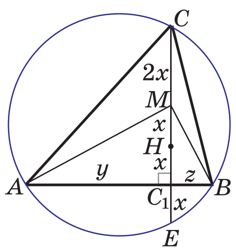


Рис. 8

Тогда

$$EC_1 = HC_1 = x,\ MC_1 = MC = 2x,$$
$$AC_1 = y,\ BC_1 = z.$$

Из прямоугольных треугольников AC_1M и BC_1M получим, что

$$AM^2 = y^2 + 4x^2,\ BM^2 = z^2 + 4x^2.$$

Кроме того, для отрезков пересекающихся хорд AB и CE окружности справедливо равенство

$$AC_1 \cdot BC_1 = CC_1 \cdot EC_1,$$

то есть

$$yz = 4x^2.$$

Таким образом,

$$AM^2 + BM^2 = y^2 + z^2 + 8x^2 = (y+z)^2 = AB^2,$$

значит,

$$\angle AMB = 90°.$$

6. *Способ I.* Пусть

$$\angle CAE = \angle BCE = \alpha.$$

Так как прямоугольные треугольники ACE и CBE подобны (рис. 9), то

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CB}{CE}.$$

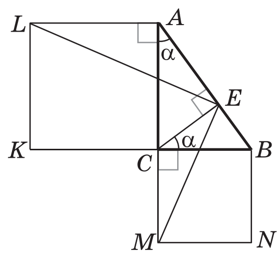


Рис. 9

Учитывая, что

$$AC = AL \text{ и } CB = CM,$$

получим:

$$\frac{AL}{AE} = \frac{CM}{CE}.$$

Кроме того,

$$\angle LAE = 90° + \alpha = \angle MCE,$$

значит, треугольники LAE и MCE подобны. Следовательно,

$$\angle LEA = \angle MEC.$$

Тогда

$$\angle LEM = \angle LEC + \angle MEC = \\ = \angle LEC + \angle LEA = 90°,$$

что и требовалось.

Комментарий. Приведенное рассуждение показывает, что треугольник MCE получается из треугольника LAE поворотной гомотетией с центром E, $k = \operatorname{tg}\alpha$ и углом 90°.

Способ II. Пусть P и Q — центры построенных квадратов (рис. 10).

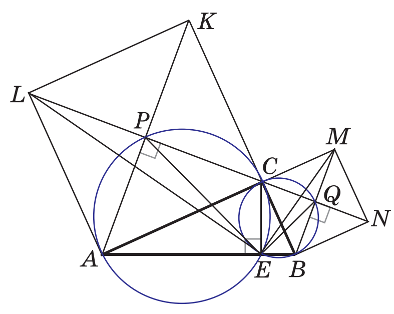


Рис. 10

Тогда четырехугольник $AECP$ вписанный, так как два его противоположных угла прямые. Кроме того, $AP = CP$, поэтому EP — биссектриса угла AEC.

Аналогично, четырехугольник $BECQ$ вписанный и EQ — биссектриса угла BEC. Следовательно, $\angle PEQ = 90°$. Значит, $\angle LEM = 90°$, если $\angle LEP = \angle MEQ$. Докажем равенство этих углов.

Рассмотрим треугольники LEP и MEQ. Пусть

$$\angle CAE = \angle CPE = \alpha,$$

$$\angle CBE = \angle CQE = \beta = 90° - \alpha.$$

Тогда

$$\angle MQE = 90° + \beta = 180° - \alpha = \angle LPE.$$

Кроме того, катеты треугольника ABC — диаметры построенных окружностей, поэтому

$$\frac{EQ}{EL} = \frac{BC \cdot \sin\angle ECQ}{AC \cdot \sin\angle ECP} = \frac{BC}{AC} = \frac{MQ}{LP}$$

(так как диагонали квадратов пропорциональны их сторонам).

Следовательно, треугольники LEP и MEQ подобны, откуда $\angle LEP = \angle MEQ$, что и требовалось.

7. Точки квадрата $MKPL$, вершины которого являются серединами сторон данного квадрата, за исключением точек, лежащих на диагоналях данного квадрата (рис. 11).

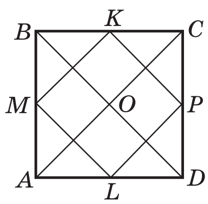


Рис. 11

Пусть $ABCD$ — данный квадрат, диагонали которого пересекаются в точке O. Рассмотрим декартову систему координат, полуосями которой являются лучи OA и OD (рис. 12 и 13), причем

$$OA = OD = 1.$$

Если точка E лежит на диагонали AC, то ее координаты $E(x;\, 0)$, где $x \in [-1;\, 1]$. Аналогично, если F лежит на BD, то $F(0;\, y)$, где $y \in [-1;\, 1]$.

Пусть точка N — середина отрезка EF, тогда $N(0{,}5x;\, 0{,}5y)$, причем

$$-0{,}5 \le 0{,}5x \le 0{,}5 \text{ и } -0{,}5 \le 0{,}5y \le 0{,}5.$$

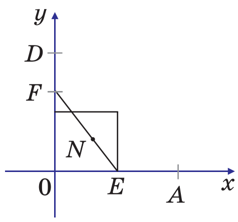


Рис. 12

Эти неравенства задают единичный квадрат с центром O, стороны которого параллельны осям координат (см. рис. 12). Докажем, что все точки этого квадрата, исключая лежащие на осях, принадлежат искомому множеству.

Пусть H — произвольная точка такого квадрата, не лежащая на осях координат (см. рис. 13). Отметим точку G, симметричную O относительно H. Если $G(x;\, y)$, то $x \in [-1;\, 1]$ и $y \in [-1;\, 1]$.

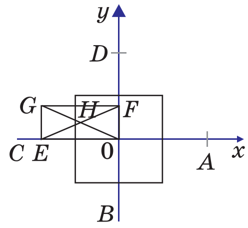


Рис. 13

Из точки G опустим перпендикуляры GE и GF на координатные оси, тогда H — середина отрезка EF, где $OE \le 1$ и $OF \le 1$. Следовательно, точка H является серединой отрезка, концы которого лежат на диагоналях данного квадрата.

Комментарий. Отметим, что возможны иные рассуждения, не использующие введение системы координат.

8. $\dfrac{t^2}{h}$.

Продолжим биссектрису AL до ее пересечения в точке N с описанной окружностью треугольника ABC (рис. 14).

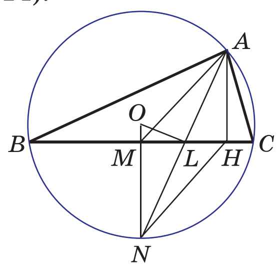


Рис. 14

Пусть O — центр этой окружности. Из равенства дуг BN и CN следует, что серединный перпендикуляр OM к стороне BC проходит через точку N.

Так как $ML = HL$, то прямоугольные треугольники NML и AHL равны. Следовательно,

$$NM = AH = h,\ NL = AL = t$$

($AHNM$ — параллелограмм). Кроме того, так как точка L — середина хорды AN, то $OL \perp AN$. Из прямоугольного треугольника OLN имеем:

$$ON \cdot MN = LN^2,$$

откуда

$$R = ON = \frac{t^2}{h}.$$

И. БАРЫШЕВ,
А. БЛИНКОВ,
А. ИВАНИЩУК,
А. ЛЯХОВЕЦ,
Н. НАКОНЕЧНЫЙ,
П. ЧУЛКОВ,
г. Москва

ТУРНИР АРХИМЕДА

МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ РЕГАТА

Математическая регата 10-х классов прошла 25 февраля 2017 года в Московском городском дворце детского (юношеского) творчества. В регате участвовало 56 команд. Помимо большого количества команд из Москвы, в ней приняли участие несколько команд из двух физико-математических школ г. Долгопрудного, двух физико-математических школ г. Санкт-Петербурга, а также команды из Жуковского и Фрязино.

Победителями регаты стали одна из команд лицея «Вторая школа», команда гимназии № 1543 (обе — Москва) и одна из команд физико-технической школы Санкт-Петербурга. Одиннадцать лучших команд получили дипломы I, II или III степени.

Полные итоги регаты опубликованы по адресу http://olympiads.mccme.ru/regata. Там же можно найти материалы регат предыдущих лет. Подробно о том, как проводятся математические регаты,
и материалы всех прошедших регат — см.: *Блинков А.Д., Гуровиц В.М., Горская Е.С.* Московские математические регаты. — М.: МЦНМО, 2014 (в двух частях).

Как обычно, часть заданий для регаты придумывалась авторами специально для нее, а остальные являются математическим фольклором или взяты из популярной математической литературы.

Условия задач

Первый тур

(*10 минут; каждая задача — 6 баллов*)

1.1. На координатной плоскости изобразите множество точек, удовлетворяющих неравенству $x^2y - y \geq 0$.

1.2. В выпуклом четырехугольнике тангенс одного из углов равен числу m. Могут ли тангенсы каждого из трех остальных углов также равняться m?

1.3. Можно ли поставить в ряд все натуральные числа от 1 до 100 так, чтобы любые два соседних числа отличались или на 2, или в два раза?

Второй тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

2.1. ($\sin x$, $\sin y$, $\sin z$) — возрастающая арифметическая прогрессия. Может ли последовательность ($\cos x$, $\cos y$, $\cos z$) также являться арифметической прогрессией?

2.2. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, M и N — середины сторон BC и AD соответственно. Отрезок MN делит площадь четырехугольника пополам. Найдите отношение $OM : ON$, если $AD = 2BC$.

2.3. Число 1047 при делении на A дает остаток 23, а при делении на $A + 1$ — остаток 7. Найдите A.

Третий тур

(*20 минут; каждая задача — 8 баллов*)

3.1. Пусть a, b, c, d — действительные числа, удовлетворяющие системе равенств

$$\begin{cases} \dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{d}+\dfrac{d}{a}=6, \\ \dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{d}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{d}{b}=8. \end{cases}$$

Какие значения может принимать выражение

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}?$$

3.2. Все грани треугольной пирамиды $SABC$ — остроугольные треугольники. SX и SY — высоты граней ASB и BSC. Известно, что четырехугольник $AXYC$ — вписанный. Докажите, что прямые AC и BS перпендикулярны.

3.3. Кодовый замок откроется, если в каждой клетке квадрата размером 4×4 набрать число от 1 до 16 (не повторяясь) так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 2×2 была кратна 17. Можно ли открыть такой замок?

Четвертый тур

(*25 минут; каждая задача — 9 баллов*)

4.1. Сто положительных чисел записаны по кругу. Квадрат каждого числа равен сумме двух чисел, стоящих за этим числом по часовой стрелке. Какие числа могут быть записаны?

4.2. Трапеция с основаниями AD и BC описана вокруг окружности, E — точка пересечения ее диагоналей. Докажите, что угол AED тупой.

4.3. В правильном 21-угольнике шесть вершин покрашены красным цветом, а семь вершин — синим. Обязательно ли найдется два равных треугольника, один из которых с красными вершинами, а другой — с синими?

Пятый тур

(*15 минут; каждая задача — 7 баллов*)

5.1. Решите уравнение

$$8\sqrt{xy}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right).$$

5.2. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках M и N так, что AB — биссектриса треугольника MAN. Докажите, что отношение отрезков BM и BN равно отношению радиусов окружностей.

5.3. Какие значения может принимать наибольший общий делитель натуральных чисел m и n, если известно, что при увеличении числа m на 6 он увеличивается в девять раз?

Ответы, решения, комментарии

1.1. См. рисунок 1.

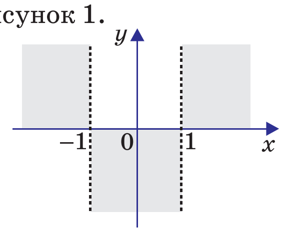


Рис. 1

$$x^2y - y \ge 0 \Leftrightarrow y(x^2 - 1) \ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \ge 0, \\ |x| \ge 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y \le 0, \\ |x| \le 1. \end{cases}$$

1.2. Не могут.

Из условия задачи следует, что в четырехугольнике нет прямых углов. Так как сумма углов четырехугольника равна 360°, то все его углы не могут быть одновременно ни тупыми, ни острыми. Следовательно, в четырехугольнике есть хотя бы один тупой угол и хотя бы один острый угол. Но тангенсы тупого и острого углов имеют разные знаки, поэтому они между собой не равны.

1.3. Можно.

Например, так:

$$99, 97, \ldots, 3, 1, 2, 4, \ldots, 98, 100$$

(сначала нечетные числа в порядке убывания, затем четные числа в порядке возрастания).

Комментарий. Существуют другие примеры.

2.1. Не может.

Способ I. Предположим, что ($\cos x$, $\cos y$, $\cos z$) — арифметическая прогрессия. Тогда

$$2\cos y = \cos x + \cos z.$$

Из условия задачи следует, что

$$2\sin y = \sin x + \sin z.$$

Возведем в квадрат каждое из этих равенств и почленно сложим. Получим:

$$4\cos^2 y + 4\sin^2 y = \\ = \cos^2 x + 2\cos x\cos z + \cos^2 z + \sin^2 x + \\ + 2\sin x \sin z + \sin^2 z \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \cos(x - z) = 1 \Leftrightarrow x - z = 2\pi n,\ n \in Z.$$

Следовательно,

$$\sin x = \sin(z + 2\pi n) = \sin z,$$

что противоречит условию задачи.

Способ II. На координатной плоскости рассмотрим точки

$A(\cos x; \sin x)$, $B(\cos y; \sin y)$, $C(\cos z; \sin z)$. Тогда

$$\overline{AB}(\cos y - \cos x; \sin y - \sin x),$$

$$\overline{BC}(\cos z - \cos y; \sin z - \sin y).$$

Если каждая из последовательностей ($\cos x$, $\cos y$, $\cos z$) и ($\sin x$, $\sin y$, $\sin z$) является арифметической прогрессией, то соответствующие координаты этих векторов равны, значит, $\overline{AB} = \overline{BC}$. Из условия задачи следует, что эти векторы ненулевые, следовательно, точки A, B и C должны лежать на одной прямой. С другой стороны, эти три точки лежат на единичной окружности. Одновременно это невозможно, так как прямая и окружность не могут иметь три общие точки.

2.2. 1 : 2.

Докажем, что $ABCD$ — трапеция. Действительно, проведем, например, отрезки BN и CN (рис 2).

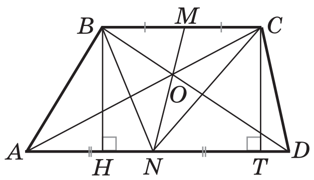


Рис. 2

Тогда NM — медиана треугольника BNC, поэтому равны площади треугольников BNM и CNM.

По условию, MN делит площадь $ABCD$ на две равные части, значит, $S_{ABN} = S_{DCN}$. Кроме того, у треугольников ABN и DCN равны основания: $AN = DN$, поэтому их высоты BH и CT также равны. Следовательно, $AD \parallel BC$, то есть $ABCD$ — трапеция.

Тогда точка O лежит на отрезке MN, а треугольники AOD и COB подобны с коэффициентом

$$k = \frac{AD}{BC} = 2.$$

Так как ON и OM — соответствующие медианы этих треугольников, то $ON : OM = k$, то есть

$$OM : ON = 1 : 2.$$

2.3. 64.

Так как 1047 дает остаток 23 при делении на A, то $1047 - 23 = 1024$ делится на A. Аналогично, 1047 дает остаток 7 при делении на $A + 1$, значит, $1047 - 7 = 1040$ делится на $A + 1$.

Так как $1024 = 2^{10}$, то $A = 2^n$, где n — натуральное и $n \leq 10$. При этом $A > 23$, поэтому $n \geq 5$. Осталось выяснить, какие из чисел

$$2^5 + 1,\ 2^6 + 1,\ 2^7 + 1,\ 2^8 + 1,\ 2^9 + 1,\ 2^{10} + 1$$

являются делителями числа 1040. Непосредственной проверкой убеждаемся, что этому условию удовлетворяет только одно из этих чисел: $2^6 + 1 = 65$. Следовательно, $A = 2^6$.

3.1. 2 или 4.

Пусть

$$x = \frac{a}{b} + \frac{c}{d},\quad y = \frac{b}{c} + \frac{d}{a},$$

тогда $x + y = 6$, а

$$x \cdot y = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{c} + \frac{d}{a}\right) = \frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{d}{b} + \frac{c}{a} = 8.$$

Следовательно, x и y являются корнями квадратного уравнения

$$t^2 - 6t + 8 = 0.$$

Так как $t_1 = 2$, $t_2 = 4$, то $x = 2$ или $x = 4$.

3.2. *Способ I.* Пусть H — проекция точки S на плоскость ABC, тогда по теореме о трех перпендикулярах $HX \perp AB$ и $HY \perp BC$ (рис. 3).

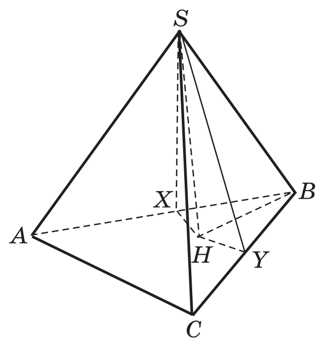


Рис. 3

Рассмотрим треугольник ABC (рис. 4).

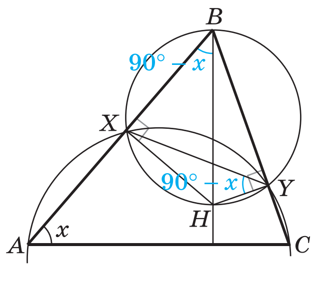


Рис. 4

Пусть $\angle BAC = x$. По условию, четырехугольник $AXYC$ вписанный, следовательно,

$$\angle BYX = \angle BAH = x.$$

Кроме того,

$$\angle BXH = \angle BYC = 90°,$$

поэтому четырехугольник $BXHY$ также вписанный. Тогда

$$\angle ABH = \angle XYH = 90° - x.$$

Таким образом,

$$\angle ABH + \angle BAC = 90°,$$

значит, $BH \perp AC$. Следовательно, $BS \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Способ II. Проведем высоту AZ в грани SAB (рис. 5).

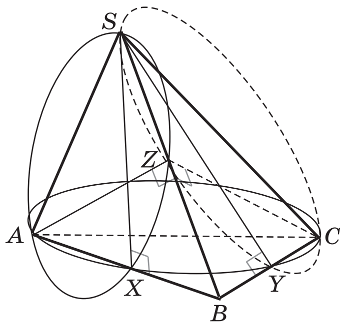


Рис. 5

Тогда точки A, X, Z и S лежат на одной окружности. По теореме об отрезках секущих (о степени точки):

$$BX \cdot BA = BZ \cdot BS.$$

По условию, четырехугольник $AXYC$ вписанный, следовательно, используя ту же теорему, получим:

$$BX \cdot BA = BY \cdot BC.$$

Из двух полученных равенств следует, что

$$BZ \cdot BS = BY \cdot BC.$$

Это означает, что точки C, Y, Z и S также лежат на одной окружности. Тогда

$$\angle CZS = \angle CYS = 90°.$$

Таким образом,

$$BS \perp ZA \text{ и } BS \perp ZC,$$

значит, $BS \perp (AZC)$, поэтому $BS \perp AC$.

3.3. Можно.

1	16	2	15
4	13	3	14
5	12	6	11
8	9	7	10

Проверкой убеждаемся, что сумма чисел в каждом квадрате 2×2 равна 34.

Комментарий. Этот пример можно построить исходя из таких соображений: сначала «замостим» данный квадрат горизонтальными «доминошками» и в каждую из них поставим два числа с суммой 17. После этого надо добиться, чтобы суммы чисел в трех квадратах, расположенных в столбцах 2 и 3, также были кратны 17. Заметим, что в горизонтальных «доминошках» этих квадратов сумма чисел уже не может быть равной 17. Но можно сделать эти суммы больше семнадцати и меньше семнадцати на одно и то же число попеременно.

В приведенном примере эти суммы соответственно равны

$$17 + 1, 17 - 1, 17 + 1, 17 - 1.$$

Существуют и другие примеры.

4.1. Каждое из записанных чисел равно 2.

Способ I. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ — записанные числа. Тогда

$$x_1^2 = x_2 + x_3,\ x_2^2 = x_3 + x_4, \ldots,\ x_{99}^2 = x_{100} + x_1,$$

$$x_{100}^2 = x_1 + x_2.$$

Без ограничения общности можно считать, что x_1 — наименьшее из чисел (возможно, не единственное), тогда $x_2 + x_3$ — наименьшая из сумм двух чисел. Следовательно,

$$x_1^2 = x_2 + x_3 \le x_1 + x_2 = x_{100}^2,$$

поэтому $x_3 \le x_1$. Таким образом,

$$x_1 = x_3 \text{ и } x_1 = x_{100}.$$

Аналогично,

$$x_3^2 = x_4 + x_5 \le x_3 + x_4 = x_5^2,$$

поэтому $x_3 = x_5$.

Двигаясь по часовой стрелке и действуя аналогично, получим:

$$x_{100} = x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = x_{99}$$

тогда равенство

$$x_{99}^2 = x_{100} + x_1$$

равносильно тому, что $x^2 = 2x$ и $x > 0$, откуда следует, что каждое из этих чисел равно 2. Значит,

$$x_{100} = x_1 = x_3 = x_5 = \ldots = x_{99} = 2.$$

Тогда, вычисляя остальные числа, стоящие по кругу, получим, что каждое из них равно 2.

Способ II. Очевидно, что если каждое из записанных чисел равно 2, то условие задачи выполняется. Докажем, что других вариантов быть не может.

Действительно, пусть найдутся числа, большие 2. Рассмотрим наибольшее среди них число a, тогда $a = 2 + t$, где $t > 0$. Сумма двух чисел, следующих за a, равна

$$(2 + t)^2 = 4 + 4t + t^2 > 4 + 2t = 2(2 + t) = 2a.$$

Значит, хотя бы одно из двух следующих чисел больше a. Противоречие.

Аналогично, если найдутся числа, меньшие 2, то рассмотрим число b, наименьшее среди них, тогда $b = 2 - t$, где $0 < t < 2$. Сумма двух чисел, следующих за b, равна

$$(2 - t)^2 < 4 - 2t = 2b,$$

так как

$$(2 - t)^2 < 4 - 2t \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 - 4t + t^2 < 4 - 2t \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t^2 - 2t < 0 \Leftrightarrow 0 < t < 2.$$

Значит, хотя бы одно из двух следующих чисел меньше b. Противоречие.

Полученные противоречия показывают, что среди записанных чисел нет чисел, отличных от 2.

Комментарий. Отметим, что первую часть второго способа решения можно заменить такой оценкой: сложим почленно данные сто равенств. Получим:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{100}^2 = 2(x_1 + x_2 + \ldots + x_{100}).$$

По неравенству между средним квадратичным и средним арифметическим

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{100} x_i^2}{100}} \ge \frac{\sum_{i=1}^{100} x_i}{100} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{100} x_i^2 \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)^2}{100}.$$

Тогда, учитывая полученное равенство,

$$\left(\sum_{i=1}^{100} x_i\right)^2 \le 200\sum_{i=1}^{100} x_i.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{100} x_i \le 200,$$

поэтому среди данных чисел найдутся те, которые не превосходят 2.

4.2. *Способ I.* Пусть K и L — середины боковых сторон AB и CD данной трапеции (рис. 6).

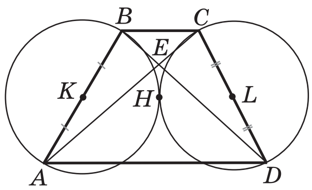


Рис. 6

Построим окружности, диаметрами которых являются эти стороны, и докажем, что окружности касаются. Действительно, так как трапеция описанная, то сумма радиусов построенных окружностей равна

$$\frac{AB}{2}+\frac{CD}{2}=\frac{AD}{2}+\frac{BC}{2}=KL.$$

Таким образом, сумма радиусов окружностей равна расстоянию между их центрами, то есть окружности касаются в некоторой точке H.

Точка E пересечения диагоналей трапеции не может лежать на ее средней линии, поэтому она не совпадает с H. Докажем, что точка E лежит вне построенных кругов. Действительно, если это не так, то она принадлежит одному из кругов, но не принадлежит другому. Следовательно, из двух углов, AEB и CED, один угол тупой или прямой, а другой — острый. Но эти углы вертикальные. Полученное противоречие показывает, что E лежит вне кругов, значит,

$$\angle AEB = \angle CED < 90°,$$

тогда $\angle AED > 90°$, что и требовалось.

Способ II. Через вершину C проведем прямую, параллельную диагонали BD, которая пересечет AD в точке P (рис. 7).

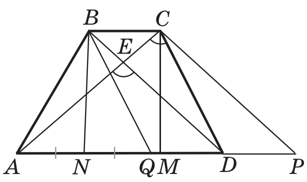


Рис. 7

Тогда

$$\angle ACP = \angle AED \text{ и } DP = BC,$$

значит,

$$AP = AD + BC.$$

Через вершину B проведем прямую, параллельную стороне CD, которая пересечет AD в точке Q. Тогда

$$BQ = CD,\ QD = BC,$$

значит,

$$AQ = AD - BC.$$

Пусть N — середина отрезка AQ, M — середина отрезка AP. Из треугольника ABQ:

$$BN < \frac{AB+BQ}{2} = \frac{AB+CD}{2} = \frac{AD+BC}{2}$$

(последнее равенство следует из того, что трапеция $ABCD$ описанная). Кроме того,

$$MN = AM - AN = \frac{AD+BC}{2} - \frac{AD-BC}{2} = BC,$$

значит, $BCMN$ — параллелограмм. Тогда

$$CM = BN < \frac{AD+BC}{2} = \frac{AP}{2}.$$

Так как CM — медиана треугольника ACP, то $\angle ACP = \angle AED > 90°$, что и требовалось.

4.3. Обязательно.

Рассмотрим повороты вокруг центра данного многоугольника на все углы вида $\frac{360°}{21}\cdot k$, где $k = 1$; 2; ...; 20, например, по часовой стрелке. Тогда каждая синяя точка попадет по одному разу в каждую из остальных вершин 21-угольника. Следовательно, каждая синяя точка по одному разу совпадет с каждой красной точкой, то есть всего таких совпадений будет $6 \cdot 7 = 42$. Так как все такие совпадения приходятся на 20 ненулевых поворотов (в исходном положении совпадений нет), то, по принципу Дирихле, найдется поворот, при котором будет не менее трех совпадений. Значит, при этом повороте образом какого-то треугольника с синими вершинами является треугольник с красными вершинами. Следовательно, эти треугольники равны.

Комментарий. Эту же идею можно реализовать иначе. Количество различных пар, состоящих из одной синей и одной красной точки, $6 \cdot 7 = 42$. Опишем окружность около данного многоугольника и поставим в соответствие каждой такой паре длину дуги от синей точки до красной, двигаясь, например, по часовой стрелке. Различных значений длин таких дуг 20, поэтому хотя бы три значения длин дуг совпадают. Получим три пары точек разного цвета, которые и определят равные треугольники с синими и красными вершинами.

5.1. (0; 0); (1; 1).

Так как слагаемые в каждой скобке правой части уравнения неотрицательны, то, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получим:

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\geq\sqrt[4]{xy},\quad \frac{\sqrt{x}+1}{2}\geq\sqrt[4]{x},\quad \frac{\sqrt{y}+1}{2}\geq\sqrt[4]{y}.$$

Перемножим почленно эти неравенства и умножим обе части полученного неравенства на 8:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)\geq 8\sqrt{xy}.$$

Следовательно, равенство достигается тогда и только тогда, когда каждое из трех неравенств обращается в равенство или когда значения обеих частей уравнения равны нулю. Значит,

$$\sqrt{x}=\sqrt{y}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=y=1 \text{ или } x=y=0.$$

Комментарий. Перед тем, как использовать неравенство о средних, можно сделать замену переменных:

$$\sqrt{x}=a\geq 0,\quad \sqrt{y}=b\geq 0.$$

5.2. Пусть O и I — центры данных окружностей, а R и r соответственно — их радиусы (рис. 8).

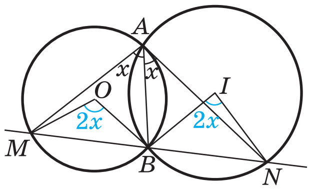


Рис. 8

Способ I. Так как

$$\angle MOB = 2\angle MAB = 2\angle NAB = \angle NIB,$$

то равнобедренные треугольники MOB и NIB подобны. Тогда

$$BM : BN = OM : IN = R : r,$$

что и требовалось.

Способ II. Обозначим

$$\angle MAB = \angle NAB = x.$$

По следствию из теоремы синусов для треугольников MAB и NAB,

$$BM = 2R\sin x,\ BN = 2r\sin x.$$

Тогда

$$\frac{BM}{BN}=\frac{R}{r},$$

что и требовалось.

5.3. 3 или 6.

Пусть НОД$(m; n) = k$, тогда $m = kx$, $n = ky$, где x и y — натуральные числа Так как

$$\text{НОД}(m+6;\ n) = 9k,$$

то $kx + 6$ делится на $9k$, то есть

$$kx + 6 = 9kz,\ z \in N.$$

Тогда

$$k(9z - x) = 6.$$

Значит, k — делитель числа 6. Кроме того, каждое из чисел $m + 6$ и n делится на 9, поэтому m делится 3. Следовательно, k делится на 3. Таким образом, достаточно проверить $k = 3$ и $k = 6$. Покажем, что оба случая возможны.

1) Пусть $m = 21$, $n = 27$, тогда

НОД(21; 27) = 3,

НОД(27; 27) = 27.

2) Пусть $m = 48$, $n = 54$, тогда

НОД(48; 54) = 6,

НОД(54; 54) = 54.

КАК СТАТЬ АВТОРОМ ЖУРНАЛА «МАТЕМАТИКА»?

Сделать это несложно: надо лишь написать статью и прислать ее в редакцию журнала. И еще одно условие — она должна быть интересна и полезна вашим коллегам. Требования к оформлению статьи:

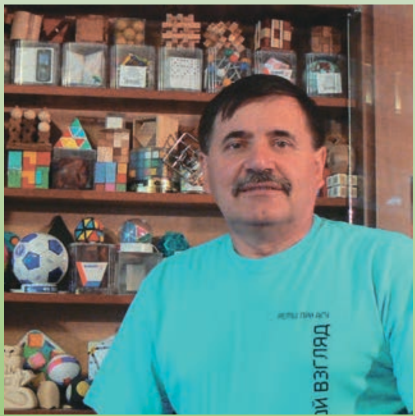
- Материал должен быть напечатан на компьютере.
- Рисунки должны быть четкими, аккуратными, выполненными на белой нелинованной или клетчатой бумаге с помощью чертежных инструментов. Если вы хорошо владеете компьютером, можете воспользоваться для этого программой Corel Draw.
- Рисунки надо пронумеровать, нумерация должна соответствовать их нумерации в тексте.
- Фотографии должны быть цветными. Формат фотографий, отпечатанных на бумаге, не менее 10 × 15 см. Размер цифровых фотографий не менее 800 × 600 пикселей, формат JPG, качество, используемое при сохранении JPG-файлов, высокое (high).

Прислать статью можно по почте или по электронной почте. Всю необходимую для этого информацию вы найдете на странице 2 журнала.

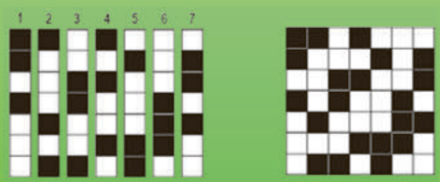
Н. АВИЛОВ,
avilow@rambler.ru,
ст. Егорлыкская, Ростовская обл.

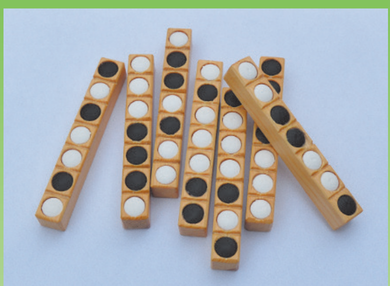
Фото предоставлено автором

СИММЕТРИЧНЫЕ ПИКТОГРАММЫ ХАРИНОВА



Ведущий рубрики — Николай Иванович Авилов — на фоне своей коллекции головоломок





Симметриксы — это современный тип головоломок на составление симметричных фигур из нескольких игровых элементов. Считается, что идею симметриксов придумал японский изобретатель Тадэо Китазава в 2003 году. Его симметриксы *геометрические*. Между тем Михаил Вячеславович Харинов из Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации РАН еще в 1990 году изобрел и запатентовал серию игр на составление симметричных пиктограмм. Симметриксы Харинова *комбинаторные*, в них требуется, комбинируя игровые элементы, сложить квадрат 7×7, в котором закрашенные клетки внутри квадрата располагаются симметрично.

На белой картонной полоске 7×1 три квадрата можно закрасить черным цветом 19 различными способами (найдите их все самостоятельно). Из этого множества полос Михаил Вячеславович выбрал семь (представлены на рисунке слева). Если эти полосы плотно приложить друг к другу, то получится квадрат 7×7, в котором закрашенные клетки располагаются симметрично относительно диагонали квадрата.

Полученный квадрат 7×7, состоящий из черных и белых клеток, автор назвал пиктограммой и дал ей имя Сова, потому что, добавив несколько штрихов, то можно увидеть образ этой ночной птицы.

Автор провел апробацию своей головоломки в младших классах и убедился, что его головоломка способствует развитию логического и образного мышления учащихся. Оказалось, что практически у каждого ребенка 3–5-го класса развито художественное воображение и творческая фантазия, конечно, в разной мере, а пиктограммы помогают проявить эти способности.

Возможно, читатель удивится, почему я не даю возможности построить ему симметриксы самостоятельно и щедро сообщаю одно за другим решения этой головоломки. Не переживайте, у вас есть возможность отличиться, потому что пиктограмма «Сова» — это лишь один из вариантов симметричных пиктограмм, полученных из семи черно-белых полос. Проведя полное исследование своей головоломки, Харинов доказал, что, переставляя вертикальные полосы в другом порядке, можно сложить 28 симметричных пиктограмм. Цель головоломки — отыскать их все! Полный список этих пиктограмм приведен в ответах. Каждой симметричной пиктограмме Михаил Вячеславович дал имя.

В заключении скажу, что свой игровой набор я сделал из деревянных палочек, высверлив по семь круглых гнезд в каждой из них. В гнезда, в соответствии со схемой, вставил черные и белые заглушки, которыми маскируют головки шурупов. Получился удобный игровой набор. Пробуйте и решайте. Когда симметрия рождается из хаоса — это всегда удивляет!

Есть дополнительные материалы на сайте raum.math.ru.

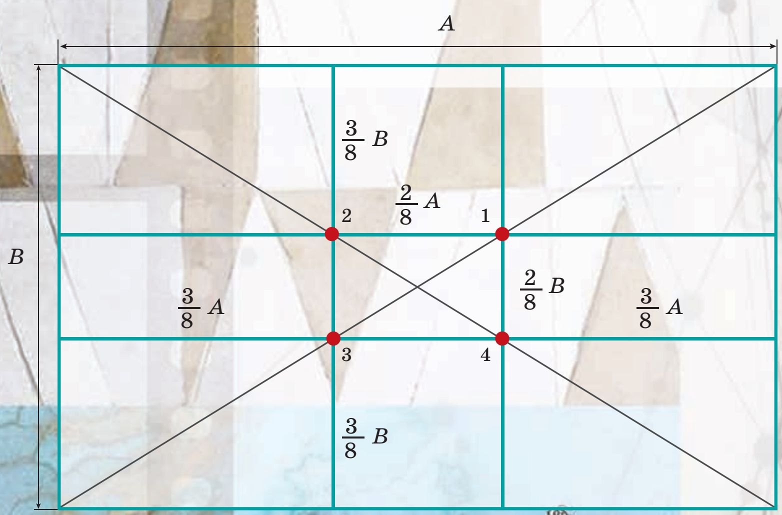
ПРОПОРЦИИ

ФОТОГРАФИЯ

Одно из первых правил композиции, которое необходимо освоить начинающему фотографу, называется правилом третей. Это упрощенный вариант золотого сечения. Применяется оно не только в фотографии, но и в живописи, а также в дизайне.

Это правило помогает расположить наилучшим для восприятия образом объекты кадра, на которые фотограф хочет направить внимание зрителя. Для определения зрительных центров — тех точек и линий, на которые будет падать взгляд, — кадр делится линиями, параллельными его сторонам, в отношениях 3 : 5, 2 : 3 или 1 : 2. Числа отношений взяты не случайно — это два последовательных числа Фибоначчи. На нашей схеме показано деление в отношении 3 : 5.

Важные части композиции должны быть расположены вдоль этих линий, или на их пересечении — эти точки называют точками силы. Например, при съемке морских пейзажей используют отношение 1:2, то есть линию горизонта надо расположить так, чтобы море или небо занимало две трети кадра.



МАТЕМАТИКА МЦНМО апрель 2018. Подписка по каталогу АРЗИ: 80506