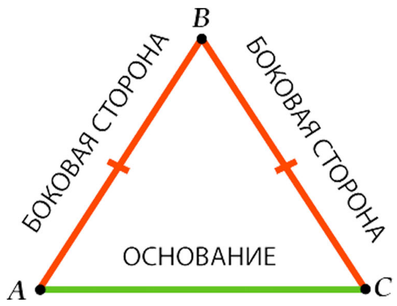
Треугольники

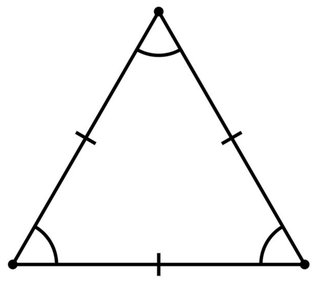
Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки. Точки называются вершинами треугольника, а отрезки - его сторонами.

Виды треугольников

1) Треугольник называется равнобедренным, если у него две сторны равны.
Эти равные стороны называются боковыми сторонами,
а третья сторона называется основанием треугольника.

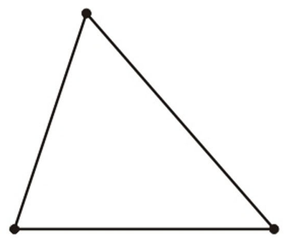


2) Треугольник, у которого все сторны равны, называется равносторонним или правильным.

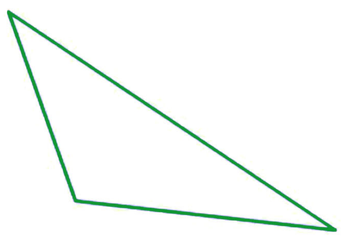


3) Треугольник называется прямоугольным, если у него есть прямой угол, то есть угол в 90°.
Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется
гипотенузой, две другие стороны называются катетами.

4) Треугольник называется остроугольным, если все три его угла — острые, то есть меньше 90°.



5) Треугольник называется тупоугольным, если один из его углов — тупой, то есть больше 90°.

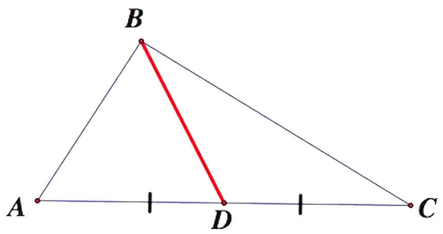


УМСКУЛ

Основные линии треугольника

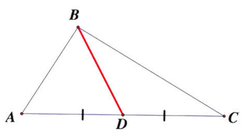
Медиана

Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны этого треугольника.



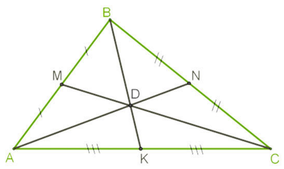
Свойства медиан треугольника

1) Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади.



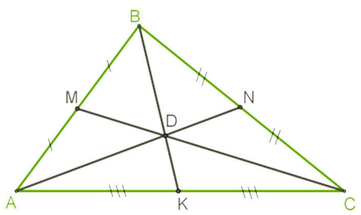
$S_{ABD} = S_{BDC}$

2) Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины. Эта точка называется центром тяжести треугольника.



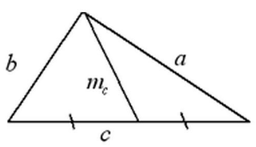
$$\frac{BD}{DK} = \frac{AD}{DN} = \frac{CD}{DM} = \frac{2}{1}$$

3) Весь треугольник разделяется своими медианами на шесть равновеликих треугольников.



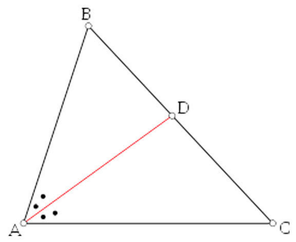
$S_{AMD} = S_{ADK} = S_{DKC} = S_{DBN} = S_{DBM} = S_{DNC}$

4) Длина медианы, проведённой к стороне c, равна: $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$



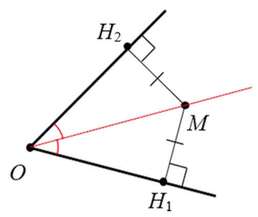
Биссектриса

Биссектриса угла — это луч, который исходит из его вершины, проходит между его сторонами и делит данный угол пополам.

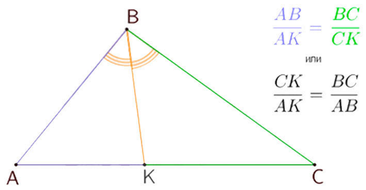


Свойства биссектрис треугольника

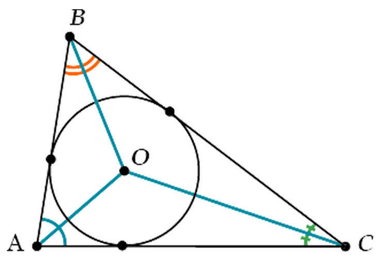
1) Биссектриса угла — это геометрическое место точек, равноудаленных от сторон этого угла.



2) Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилегающим сторонам: x/y=a/b.

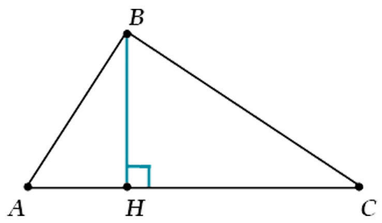


3) Точка пересечения биссектрис треугольника является центром окружности, вписанной в этот треугольник.



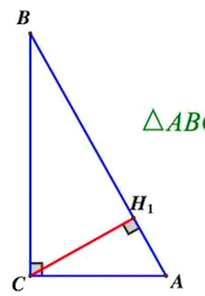
Высота

Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону этого треугольника.



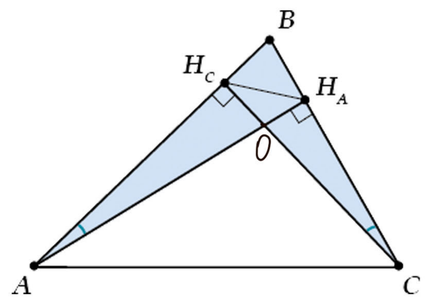
Свойства высот треугольника

1) В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному.



$\triangle ABC \approx \triangle ACH_1 \approx \triangle CBH_1$

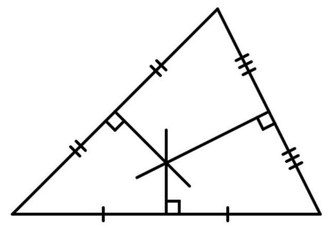
2) В остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные треугольники.



$\triangle AOH_C \sim \triangle COH_A$

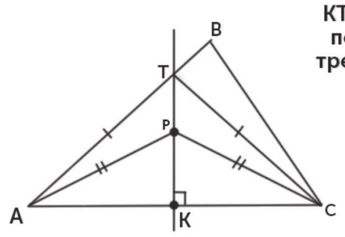
Срединный перпендикуляр

Прямую, проходящую через середину отрезка перпендикулярно к нему, называют серединным перпендикуляром к отрезку.



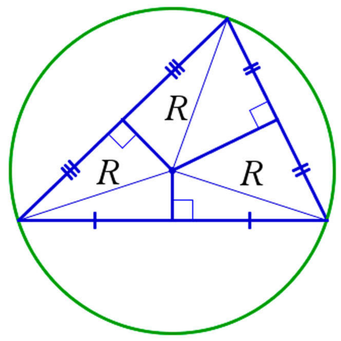
Свойства серединных перпендикуляров треугольника

1) Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Верно и обратное утверждение: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.



КТ - серединный перпендикуляр треугольника ABC

2) Точка пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника, является центром окружности, описанной около этого треугольника.

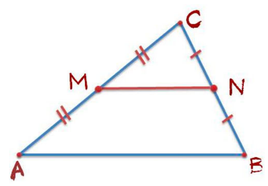


Средняя линия

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Свойство средней линии треугольника

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

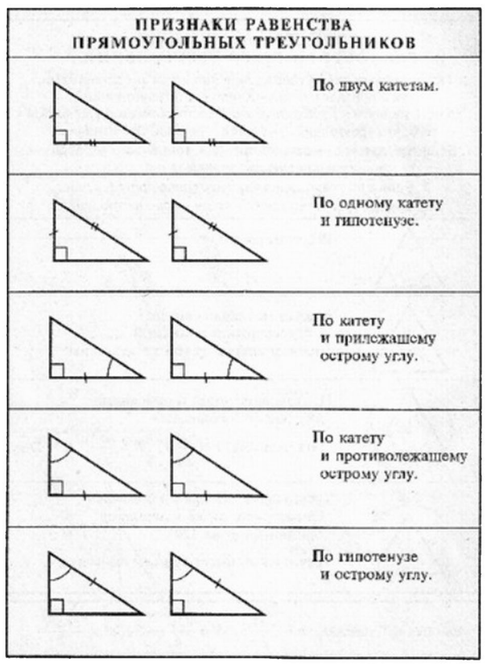


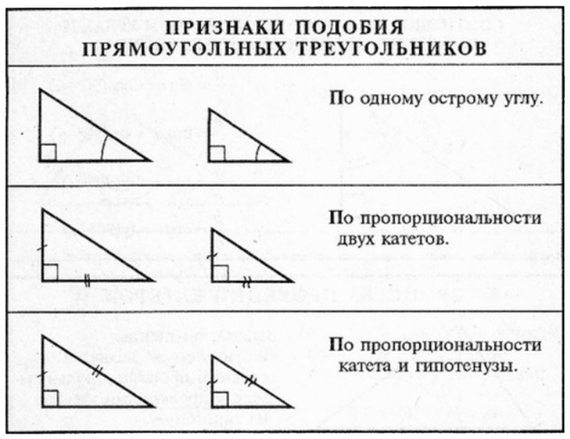
$MN \parallel AB$

$MN = \frac{1}{2}AB$

УМСКУЛ

Формулы и соотношения в треугольниках

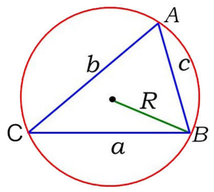




В подобных треугольниках соответствующие линии (высоты, медианы, биссектрисы и т. п.) пропорциональны.

Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов, причем коэффициент пропорциональности равен диаметру описанной около треугольника окружности:

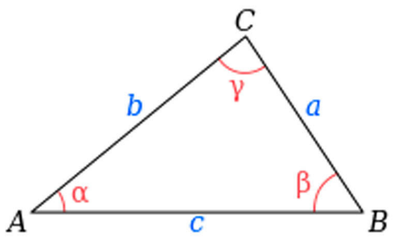


$AB=c$ $BC=a$ $CA=b$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

Теорема косинусов

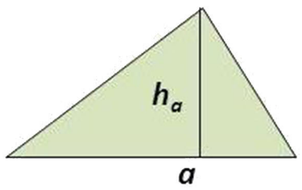
Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:



$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$$

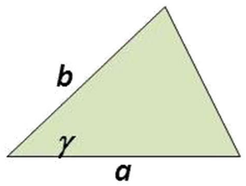
Формулы площади треугольника

1) Площадь треугольника равна половине произведения высоты на основание



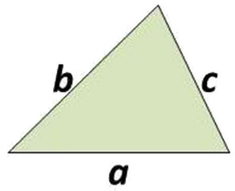
$$S=\frac{1}{2}a\cdot h_a$$

2) Площадь треугольника равна половине произведения сторон на синус угла между ними



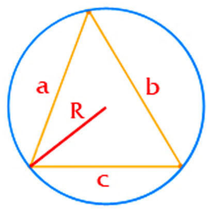
$$S=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma$$

3) Формула Герона для треугольника



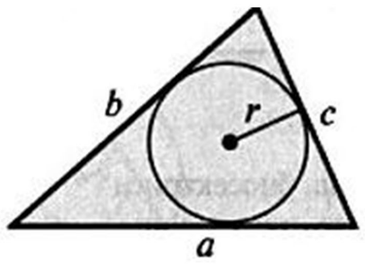
$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\quad p=\frac{a+в+c}{2}$$

4) Площадь треугольника через радиус описанной окружности



$$S=\frac{abc}{4R}$$

5) Площадь треугольника через радиус вписанной окружности



Через полупериметр и радиус вписанной окружности:

$S=pr$,

где $p=\frac{a+b+c}{2}$.

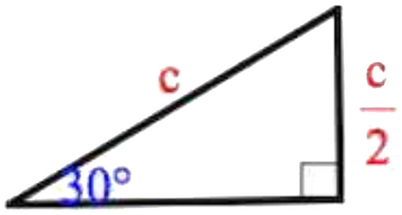
УМСКУЛ

Треугольник

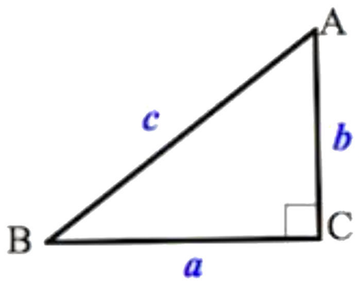
Прямоугольный

1) Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90 градусов.

2) Катет, противолежащий углу в 30 градусов, равен половине гипотенузы.



3) Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$, где a, b - катеты, c - гипотенуза.

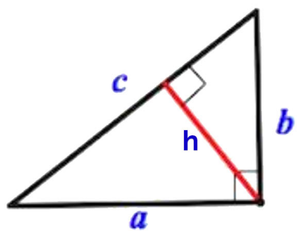


4) Площадь S прямоугольного треугольника с катетами a, b:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b$$

5) Высота h прямоугольного треугольника, проведённая к гипотезуне, выражается через катеты a,b и гипотенузу с следующим образом:

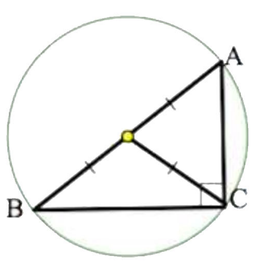
$$h = \frac{a \cdot b}{c}$$



6) Центр описанной окружности - есть середина гипотенузы
7) Медиана, проведённая к гипотенузе, равна её половине.

8) Радиус R описанной окружности, есть половина гипотенузы c:

$$R = \frac{c}{2}$$



Равнобедренный

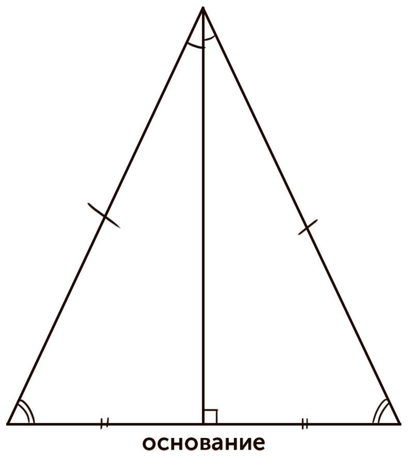
В равнобедренном треугольнике:

1) углы при основании равны.

2) биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.

3) медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

4) высота, проведенная к основанию, является биссектрисой и медианой.



Равносторонний

1) Все углы равност. треугольника равны и равны 60 градусам

2) Медианы, биссектрисы и высоты равност. треугольника совпадают и равны:

$$h_a = l_a = m_a = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

3) Радиус описанной вокруг равност. треугольника окружности:

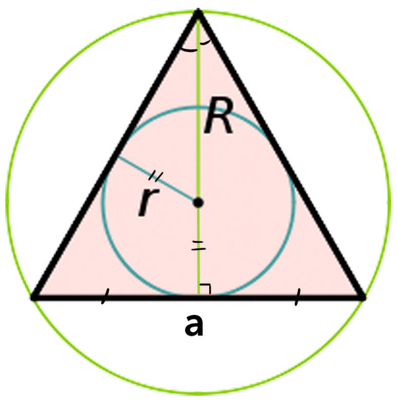
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

4) Радиус вписанной в равност. треугольник окружности:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

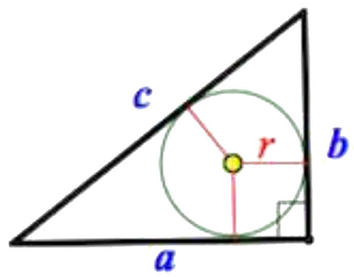
5) Площадь равност. треугольника:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



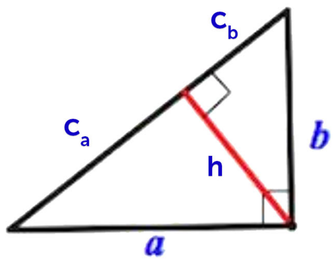
9) Радиус r вписанной окружности выражается через катета a,b и гипотенузу c следующим образом:

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$



10) Высота, проведенная к гипотенузе, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.

$$h = \sqrt{c_a \cdot c_b}$$

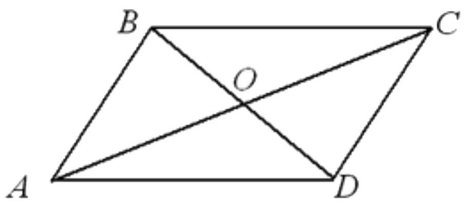


УМСКУЛ

Четырёхугольники, их признаки и свойства

Параллелограмм

Параллелограмм — четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.



Теоремы (свойства параллелограмма):

1) В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны: AB = CD, BC = AD, $\angle ABC = \angle ADC$ $\angle BAD = \angle BCD$

2) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам: AO = OC, OB = OD.

3) Углы, прилежащие к любой стороне, в сумме равны 180°.

4) Диагонали параллелограмма делят его на два равных треугольника.

5) Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:
$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$

Признаки параллелограмма:

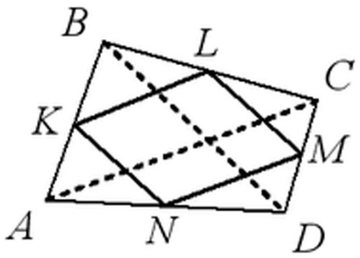
1) Если противоположные стороны четырех-ка попарно параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

2) Если в четырех-ке противоположные стороны попарно равны, то этот четырех-к — параллелограмм.

3) Если в четырех-ке две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырех-к — параллелограмм.

4) Если в четырех-ке диагонали, пересекаясь, точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.

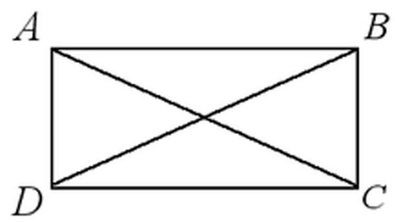
5) Середины сторон произвольного (в том числе невыпуклого или пространственного) четырех-ка K, L, M, N являются вершинами параллелограмма Вариньона.



6) Стороны этого параллелограмма параллельны соответствующим диагоналям четырех-ка ABCD. Периметр параллелограмма Вариньона равен сумме длин диагоналей исходного четырех-ка, а площадь параллелограмма Вариньона равна половине площади исходного четырех-ка.

Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые.

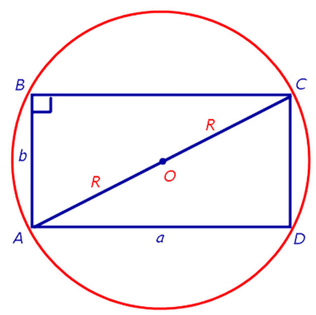


Свойства:

1) Все свойства параллелограмма.

2) Диагонали прямоугольника равны: AC = BD.

3) Вокруг прямоугольника всегда можно описать окружность.

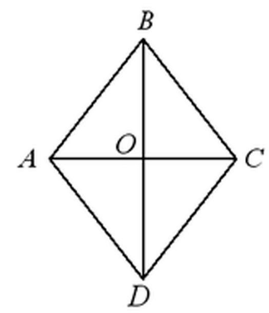


Признак прямоугольника:

Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

Ромб

Ромб — параллелограмм, у которого все стороны равны.



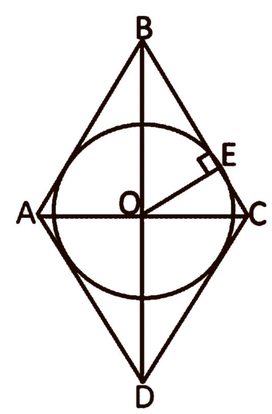
Свойства:

1) Все свойства паралл-ма.

2) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

3) Диагонали ромба являются биссектрисами углов.

4) В ромб всегда можно вписать окружность.



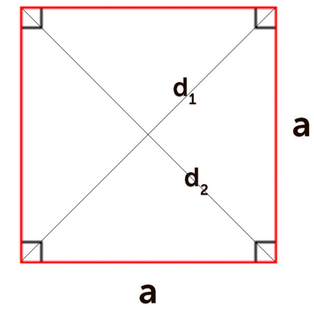
Признаки ромба:

1) Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

2) Если в параллелограмме диагонали являются биссектрисами углов, то этот параллелограмм — ромб.

Квадрат

Квадрат – параллелограмм, у которого все стороны равны и все углы — прямые; или прямоугольник, у которого все стороны равны; или ромб, у которого все углы — прямые.



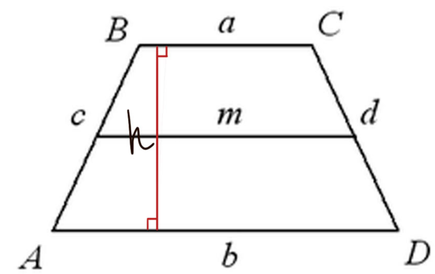
Свойства:

1) Все свойства прямоугольника и ромба.

2) Диагонали квадрата равны: $d_1 = d_2 = a\sqrt{2}$

Трапеция

Трапеция — четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две стороны не параллельны. Параллельные стороны называются основаниями трапеции, две другие — боковыми сторонами.

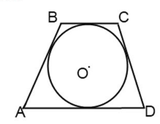


Высота трапеции — расстояние между прямыми, на которых лежат основания трапеции, любой общий перпендикуляр этих прямых.

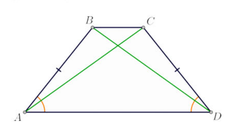
Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

Свойство трапеции:

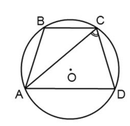
1) Если в трапецию вписана окружность, то сумма оснований равна сумме боковых сторон: AB + DC = BC + AD, а средняя линия — полусумме боковых сторон:



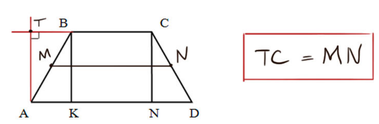
2) Равнобедренная трапеция — трапеция, у которой боковые стороны равны AB = CD. Тогда равны диагонали AC = BD и углы при основании



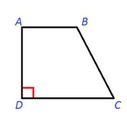
3) Из всех трапеций только около равнобедренной трапеции можно описать окружность, так как окружность можно описать около четырехугольника, только если сумма противоположных углов равна 90°



4) В равнобедренной трапеции расстояние от вершины одного основания до проекции противоположной вершины на прямую, содержащую это основание равно средней линии.



5) Прямоугольная трапеция — трапеция, у которой один из углов при основании равен



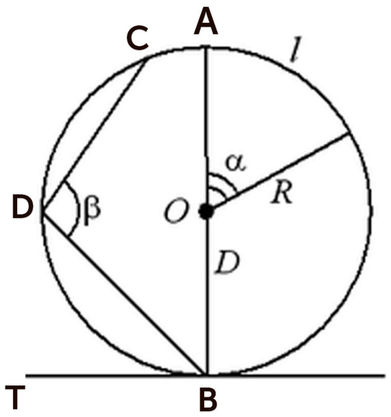
УМСКУЛ

Окружность

Элементы окружности

Окружность — множество всех точек плоскости, удаленных на заданное расстояние (равное радиусу) от заданной точки этой же плоскости (центра окружности).

1) Радиусы — отрезки, соединяющие точки окружности с центром.
Все радиусы данной окружности равны.



2) Хорда — отрезок, соединяющий любые две точки окружности. (CD - на картинке)

3) Диаметр — хорда, проходящая через центр окружности. Диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде. (AB - на картинке)

4) Центральный угол — угол, образованный двумя радиусами. Центральный угол измеряется дугой, на которую опирается. (альфа - на картинке)

5) Вписанный угол — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны являются ее хордами. (бетта - на картинке)

6) Касательная — прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярно ее радиусу. Касательная имеет с окружностью только одну общую точку. (TB - на картинке)

7) Длина окружности: $L = 2\pi R = \pi D$
R — радиус окружности, D — диаметр.

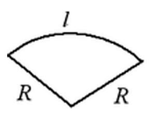
8) Длина дуги окружности: $l = Ra = \frac{\pi R\alpha}{180^\circ}$

a — радианная мера дуги, α — градусная мера.

9) Круг — часть плоскости, ограниченная окружностью.

Площадь круга: $S = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$

10) Сектор — часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой окружности.



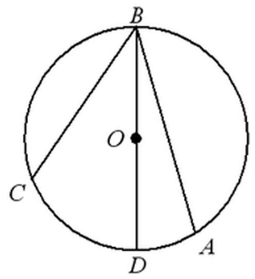
Площадь сектора: $S = \frac{Rl}{2} = \frac{R^2\alpha}{2} = \frac{\pi R^2\alpha}{360^\circ}$

12) Сегмент – часть круга, ограниченная хордой и дугой.

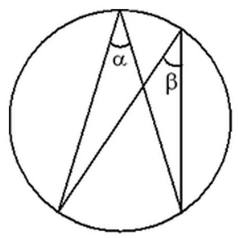
Площадь сегмента: $S = \frac{R^2(a - \sin\alpha)}{2}$ (или $S = \frac{R^2(a + \sin\alpha)}{2}$, если центр круга лежит внутри сегмента).

Свойства вписанных углов

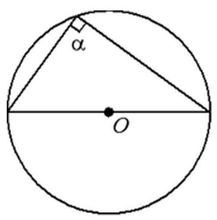
1) Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается: $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup CDA$



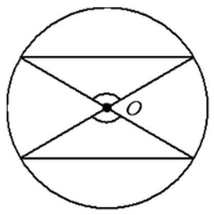
2) Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны: $\alpha = \beta$



3) Вписанный угол, опирающийся на диаметр — прямой.

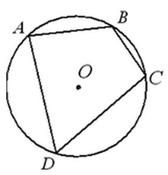


4) Равные дуги окружности стягиваются равными хордами



Окружность, описанная около четырехугольника

Если вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной около многоугольника, а многоугольник — вписанным в эту окружность.



Теоремы:

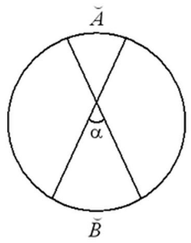
1) Центром описанной окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

2) В любом четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма противоположных углов равна 180°.

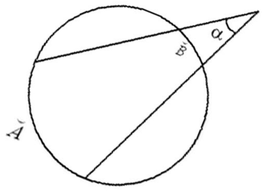
3) Из всех параллелограммов окружность можно описать около прямоугольника, квадрата.

Углы, связанные с окружностью

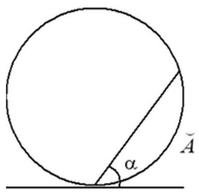
1) **Теорема (угол между пересекающимися хордами).** Угол между двумя пересекающимися хордами равен полусумме высекаемых ими дуг: $\alpha = \frac{\breve{B} + \breve{A}}{2}$



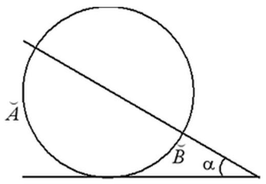
2) **Теорема (угол между секущими).** Угол между двумя секущими, проведенными из одной точки, равен полуразности большей и меньшей высекаемых ими дуг: $\alpha = \frac{\breve{A} - \breve{B}}{2}$



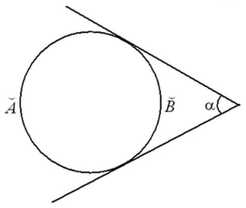
2) **Теорема (угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания).** Угол между касательной и хордой, проведенной в точку касания, равен половине дуги, стягиваемой этой хордой: $\alpha = \frac{\breve{A}}{2}$



3) **Теорема (угол между касательной и секущей).** Угол между касательной и секущей равен полуразности высекаемых ими дуг: $\alpha = \frac{\breve{A} - \breve{B}}{2}$

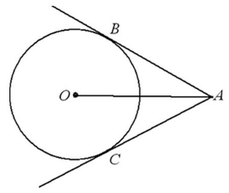


4) **Теорема (угол между касательными).** Угол между двумя касательными, проведенными из одной точки, равен полуразности большей и меньшей высекаемых ими дуг: $\alpha = \frac{\breve{A} - \breve{B}}{2}$



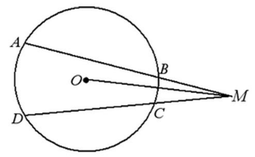
Отрезки, связанные с окружностью

1) **Теорема.** Отрезки касательных к окружностям, проведенным из одной точки, равны: AB = AC, центр окружности лежит на биссектрисе угла BAC.



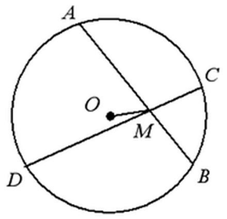
2) **Теорема.** Произведение секущей на ее внешнюю часть есть для данной окружности величина постоянная и равная разности квадратов расстояния от точки пересечения секущих до центра окружности и радиуса окружности:

$(AB + BM) \cdot BM = (DC + CM) \cdot CM = MO^2 - R^2$

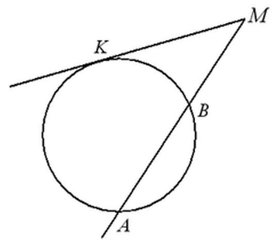


3) **Теорема.** Произведение отрезков, на которые делится хорда данной точкой, есть для данной окружности величина постоянная и равна разности квадратов радиуса окружности и расстояния от точки M до центра окружности:

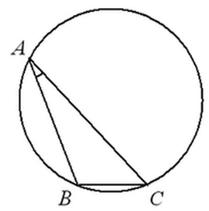
$AM \cdot MB = CM \cdot MD = R^2 - MO^2$



4) **Теорема.** Квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть: $KM^2 = MB \cdot (MB + AB)$

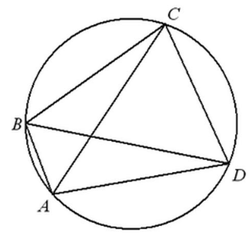


5) **Теорема.** Отношение хорды к синусу вписанного угла, который на нее опирается, равно двум радиусам (теорема синусов): $\frac{BC}{\sin\angle BAC} = 2R$



6) **Теорема Птолемея:** Во всяком четырехугольнике, вписанном в окружность, сумма произведений длин противоположных сторон равна произведению длин его диагоналей:

$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$



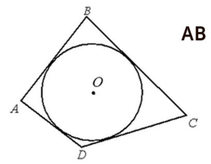
Окружность, вписанная в многоугольник

Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется вписанной в многоугольник, а многоугольник — описанным около этой окружности.

Теоремы:

1) Центром вписанной в четырехугольник окружности является точка пересечения биссектрис (если она биссектрисы всех его углов пересекаются в одной точке).

2) В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.



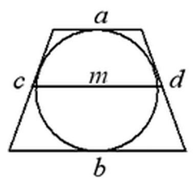
AB + DC = AD + BC

3) Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны, то в него можно вписать окружность.

4) Из параллелограммов окружность можно вписать в ромб, квадрат.

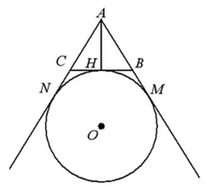
5) Если в трапецию вписана окружность, то сумма оснований равна сумме боковых сторон, а средняя линия — полусумме боковых сторон:

$a + b = c + d$, $m = \frac{a+b}{2} = \frac{c+d}{2}$



Вневписанная окружность

Вневписанная окружность — окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжения двух других его сторон.



1) **Теорема.** Расстояние от вершины треугольника до точки касания вневписанной окружности с продолжением его боковой стороны равно полупериметру p: $AN = p$

Примечание: точка касания вневписанной окружности со стороной треугольника делит его периметр пополам: $|AC| + |CH| = p$

Следствие: $CH = p - AC = p - c, HB = p - b$

2) **Теорема.** Радиус вневписанной окружности, проведенный к стороне a, вычисляется по формуле:

$$r_a = \frac{S}{p - a}$$

3) **Теорема.** Площадь треугольника, можно вычислить по формуле: $S = \sqrt{r_a \cdot r_b \cdot r_c \cdot r}$

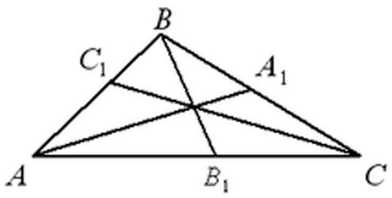
где r — радиус вписанной окружности; r_a — радиус вневписанной окружности, проведенный к стороне a; r_b — радиус вневписанной окружности, проведенный к стороне b; r_c — радиус вневписанной окружности, проведенный к стороне c.

УМСКУЛ

Ещё формулы

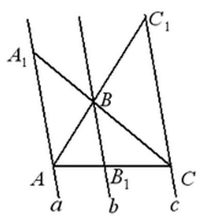
Теоремы об отрезках в треугольнике

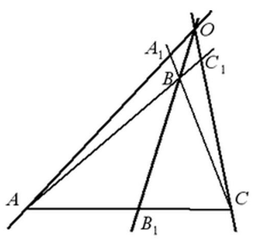
1) **Теорема Чевы.** Пусть на сторонах треугольника ABC выбраны точки, $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$. Тогда отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пресекаются в одной точке тогда и только тогда, когда выполняется равенство:



2) **Обобщенная теорема Чевы.** Пусть прямые a, b, c проходят через вершины A, B, C треугольника ABC и пересекают прямые BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Тогда прямые a, b, c пересекаются в одной точке или параллельны тогда и только тогда, когда имеет место равенство:

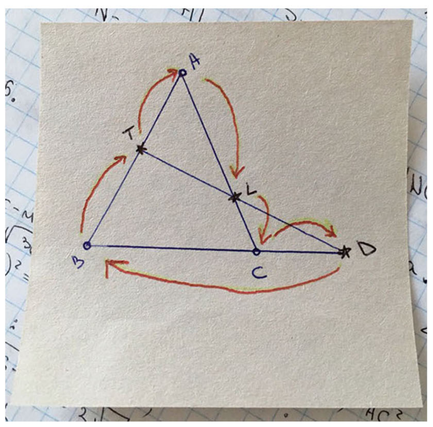
$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$$





3) **Теорема Менелая.**

$$\frac{BT}{AT} \cdot \frac{AL}{LC} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$$



Теоремы о площади четырехугольника

1) Любой четырехугольник можно разбить на треугольники, и его площадь будет равна сумме площадей треугольников.

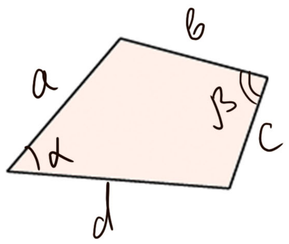
2) Если в четырехугольник можно вписать окружность, то его площадь равна: S = pr, где
p - полупериметр фигуры,
r - радиус впис. окружности

3) Площадь выпуклого четырехугольника можно вычислить по формуле:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

где a, b, c, d - стороны четыр-ка,

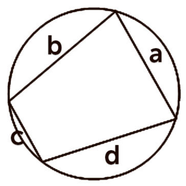
α, β - два его против-щих угла



Следствие 1: Если четырехугольник вписан в окружность, то его площадь будет равна:

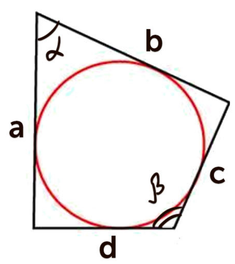
$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

p - полупериметр фигуры



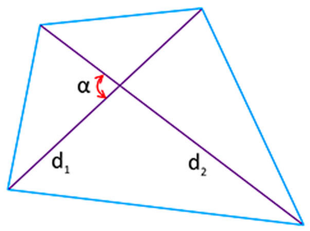
Следствие 2: Если четырехугольник описан около окружности, то его площадь будет равна:

$$S = \sqrt{abcd}\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$



4) Если диагонали выпуклого четырехугольника равны d_1 и d_1 и образуют уго. α, то площадь четырехугольника равна:

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha$$



Следствие: Площадь ромба равна:

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$$

5) Площадь квадрата:

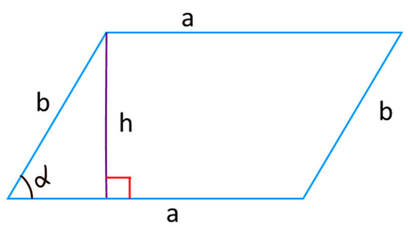
$$S = a^2$$

6) Площадь прямоугольника:

$$S = ab$$

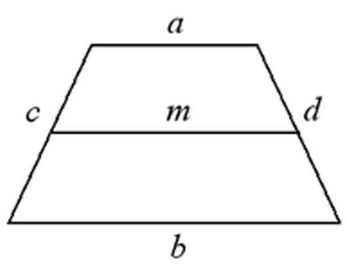
7) Площадь паралл-ма:

$$S = ab\sin\alpha = ah$$



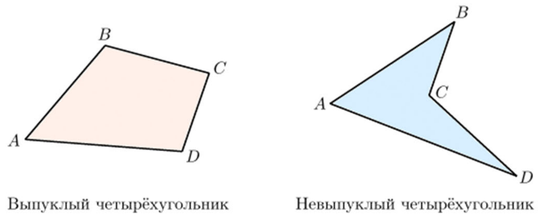
8) Площадь трапеции:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = mh$$



Выпуклые четырехугольники

1) Выпуклый четырехугольник — четырехугольник, который расположен по одну сторону от любой из своих сторон.



Выпуклый четырёхугольник Невыпуклый четырёхугольник

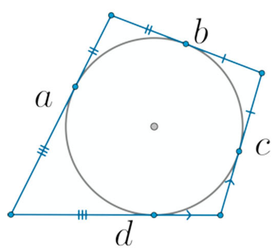
2) Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°.

3) Средняя линия — отрезок прямой, соединяющий середины противоположных сторон.

4) Средние линии четырехугольника в точке своего пересечения делятся пополам.

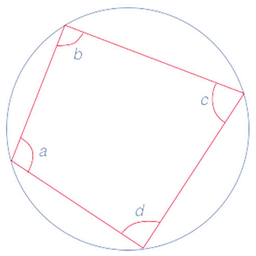
Теоремы:

1) Для того, чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма длин противоположных сторон были равны друг другу. Центр окружности — точка пересечения биссектрис.



$$a + c = b + d$$

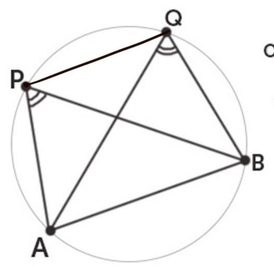
2) Для того, чтобы вокруг выпуклого четырех-ка можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных углов были равны. Центр окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам четырехугольника.



180° 180°

$\angle a + \angle c = \angle b + \angle d$

3) Другая причина, по которой окружность может быть описана около четырех-ка



Отрезок AB виден под одним и тем же углом из точек P и Q, значит, точки A,P,Q,B лежат на одной окружности

УМСКУЛ