Справочный материал «Математика 6 класс»

Делимость чисел

Делителем *b* натурального числа *a* называют натуральное число *b*,
на которое *a* делится без остатка.

Если натуральное число *a* делится на натуральное число *b*,
то число *a* называют ***кратным*** числа *b*.

Любое натуральное число имеет бесконечно много кратных и ограниченное число делителей.

Натуральное число называют ***простым***, если оно имеет только два делителя:
единицу и само это число.

Простые числа

1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27
28	29	30	31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42	43	44	45
46	47	48	49	50	51	52	53	54

А вот числа, имеющие и другие делители, называют ***составными***.

Делимость чисел

Наибольшее натуральное число, на которое делятся без остатка числа *a* и *b*, называют ***наибольшим общим делителем (НОД)*** этих чисел.

Чтобы найти наибольший общий делитель двух чисел, надо разложить каждое из чисел на простые множители.

Наименьшим общим кратным (НОК) натуральных чисел *a* и *b* называют наименьшее натуральное число, которое кратно и *a*, и *b*.

Способы нахождения наименьшего общего кратного:

1) можно найти НОК перебором: выписать в строчку кратные для каждого из чисел, пока не найдём кратное, одинаковое для обоих чисел;

2) можно найти НОК, используя разложение чисел на простые множители.

Делимость чисел

Если запись натурального числа оканчивается цифрой **0**,
то это число делится без остатка на **10**.

Если запись натурального числа оканчивается цифрой **0** или **5**,
то это число делится без остатка на **5**.

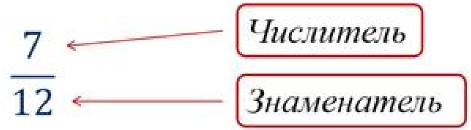
Если запись натурального числа оканчивается цифрами **2**, **4**, **6**, **8**, **0**,
то это число делится без остатка на **2**.

Если сумма цифр числа делится на **9**, то и число делится на **9**;
если сумма цифр числа НЕ делится на **9**, то и число НЕ делится на **9**.

Если сумма цифр числа делится на **3**, то и число делится на **3**;
если сумма цифр числа НЕ делится на **3**, то и число НЕ делится на **3**.

Дроби

Доля есть каждая из равных частей, на которые разделено целое.



Запись вида $\frac{7}{12}$ называют ***обыкновенной дробью***.

Число, записанное над чертой дроби, называют ***числителем***,
а число, записанное под чертой, называют ***знаменателем***.

Знаменатель показывает, на сколько частей разделили целое,
а числитель – сколько частей (долей) взяли.

Две равные дроби обозначают одно и то же дробное число.

Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та,
числитель которой больше, и, соответственно, меньше та, числитель которой меньше.

Дробь, числитель которой меньше знаменателя, называют ***правильной***.

Дробь, числитель которой больше знаменателя или равен ему, называют ***неправильной***.

Правильная дробь меньше числа 1, неправильная дробь больше или равна числу 1.

Действия с дробями

Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями,
нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тем же.

$$\boxed{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}}$$

Чтобы из одной дроби вычесть другую дробь с таким же знаменателем,
нужно из числителя уменьшаемого вычесть числитель вычитаемого,
а знаменатель оставить тем же.

$$\boxed{\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}}$$

Чтобы сложить или вычесть дроби с разными знаменателями,
нужно их сначала привести к наименьшему общему знаменателю,
а потом производить действия сложения или вычитания,
как с дробями с одинаковыми знаменателями.

Чтобы сравнить дроби с разными знаменателями,
надо привести дроби к общему знаменателю и сравнить полученные дроби,
то есть сравниваем их числители.

Больше та дробь, у которой числитель больше.
Меньше та дробь, у которой числитель меньше.

Действия с дробями

Правило умножения обыкновенных дробей на натуральное число:
чтобы умножить дробь на натуральное число,
нужно на это число умножить числитель, оставив неизменным знаменатель.

$$\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a \cdot n}{b}$$

Правило умножения обыкновенных дробей:
чтобы умножить дробь на дробь,
нужно отдельно перемножить их числители и их знаменатели
и первый результат записать числителем, а второй знаменателем.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Правило умножения смешанных чисел:
чтобы перемножить смешанные дроби,
нужно сначала преобразовать их в неправильные дроби,
а затем выполнить умножение дробей.

Действия с дробями

Правило выделения целой части из неправильной дроби:

1) разделить с остатком числитель на знаменатель;

2) неполное частное будет целой частью;

3) остаток (если он есть) даёт числитель, а делитель – знаменатель дробной части.

Любое смешанное число можно представить в виде неправильной дроби.

Правило представления смешанного числа в виде неправильной дроби:

1) нужно целую часть числа умножить на знаменатель дробной части;

2) к полученному произведению прибавить числитель дробной части;

3) записать полученную сумму числителем дроби,
а знаменатель дробной части оставить без изменения.

Действия с дробями

Чтобы умножить смешанное число на натуральное число, можно:

1) умножить целую часть на натуральное число;

2) умножить дробную часть на это натуральное число;

3) сложить полученные произведения.

Правило умножения смешанных чисел:

Для того чтобы умножить смешанное число на смешанное число, можно:

1) перевести одно смешанное число в неправильную дробь;

2) умножить целую часть второго множителя на неправильную дробь;

3) умножить дробную часть второго множителя на неправильную дробь;

4) сложить полученные результаты.

Действия с дробями

Сумму натурального числа и правильной дроби принято записывать без знака «+».
Такую сумму называют ***смешанным числом***.
Натуральное число называют ***целой частью смешанного числа***,
а дробь – ***дробной частью смешанного числа***.

$$5+\frac{3}{4}=5\frac{3}{4}$$

Смешанное число

Целая часть

Дробная часть

Чтобы сложить смешанные числа,
нужно сложить по отдельности их целые и дробные части
и записать сумму полученных чисел.

Если при сложении дробных частей получилась неправильная дробь,
то выделяют целую часть этой дроби и добавляют к уже имеющейся целой части.

Чтобы найти разность смешанных чисел,
нужно найти отдельно разность целых частей и отдельно разность дробных частей.

Если дробная часть уменьшаемого меньше дробной части вычитаемого,
превратить её в неправильную дробь, уменьшив на единицу целую часть.

Действия с дробями

Основное свойство дроби:
если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится равная ей дробь.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

Деление числителя и знаменателя дроби на одно и то же не равное нулю число, называется ***сокращением дроби***.

Сокращение дроби можно провести тогда и только тогда, когда её числитель и знаменатель не являются взаимно простыми числами.

Если числитель и знаменатель дроби взаимно просты, то дробь сократить нельзя.

Такие дроби называются ***несократимыми дробями***.

Чтобы найти дробь (часть) от числа, нужно умножить число на данную дробь.

Чтобы найти число по данному значению его дроби, надо это значение разделить на дробь.

Действия с дробями

Правило деления дробей:
чтобы разделить одну дробь на другую,
надо делимое (первую дробь) умножить на обратную делителю дробь.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Чтобы разделить дробь на натуральное число, можно:

натуральное число представить в виде неправильной дроби с числителем, равным самому числу, и знаменателем, равным единице, затем произвести деление по правилу деления дроби на дробь.

При делении смешанных чисел надо представить числа в виде неправильных дробей, а потом разделить их друг на друга по правилу деления дробей.

Дробные выражения

Частное двух чисел или выражений, в котором знак деления обозначен чертой, называют ***дробным выражением***.

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{8}\right):\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{8}\right)}{\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{8}\right)}$$

числитель

знаменатель

Выражение, стоящее над чертой, называют ***числителем***,
а выражение, стоящее под чертой, — ***знаменателем*** дробного выражения.
Числителем и знаменателем дробного выражения могут быть как любые числа, так и числовые или буквенные выражения.

Чтобы найти значение дробного выражения,
нужно найти по отдельности значения его числителя и знаменателя
и затем первый результат разделить на второй.

Отношения

Частное двух не равных нулю чисел
(или двух величин) называют ***отношением***.

$$a : b = \frac{a}{b}$$

– «отношение числа a к числу b»
– «отношение чисел a и b»
– «отношение a к b»

Сами эти числа (величины) называют ***членами отношения***.

Отношение двух чисел показывает, во сколько раз одно число больше другого
или какую часть одно число составляет от другого.

Если значения двух величин выражены разными единицами измерения,
то для нахождения отношения этих величин
надо предварительно перейти к одной единице измерения.

Свойство отношения:

отношение не изменится, если его члены умножить или разделить
на одно и то же число, не равное нулю.

Пропорции

$$\boxed{a : b = c : d}$$

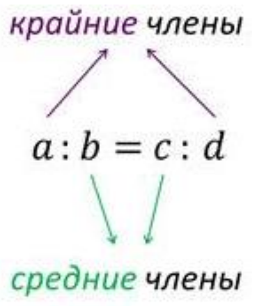
$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

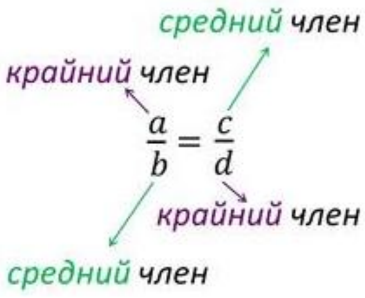
Пропорция – это равенство двух отношений.

Буквенная запись пропорции *a* : *b* = *c* : *d* – это общий вид пропорции, где *a*, *b*, *c* и *d* называют ***членами пропорции***.

a и *d* – это ***крайние*** члены пропорции,

b и *c* – ***средние*** члены пропорции.





Основное свойство пропорции:

в любой верной пропорции произведение крайних членов равно произведению средних членов пропорции.

Признак пропорции:

если произведение крайних членов равно произведению средних членов *a* · *d* = *b* · *c*, то пропорция *a* : *b* = *c* : *d* верна.

Если в верной пропорции поменять местами средние члены и крайние члены, то получившиеся новые пропорции также верны.

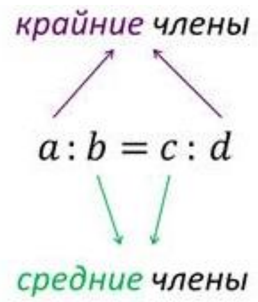
Пропорции

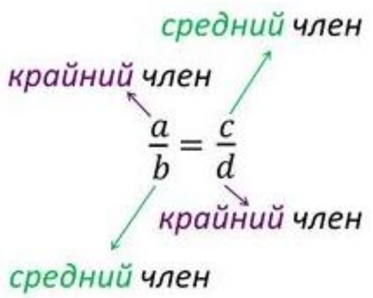
Правило для нахождения неизвестного крайнего члена пропорции:

$\boxed{a : b = c : d}$

$\boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}}$

чтобы найти неизвестный крайний член пропорции,
нужно произведение её средних членов
разделить на известный крайний член пропорции.





Правило для нахождения неизвестного среднего члена пропорции:

чтобы найти неизвестный средний член пропорции,
нужно произведение её крайних членов
разделить на известный средний член.

Прямая и обратная пропорциональные зависимости

Две величины называются ***прямо пропорциональными***,
если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз
другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Две величины называются ***обратно пропорциональными***,
если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз
другая уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

Координаты на прямой

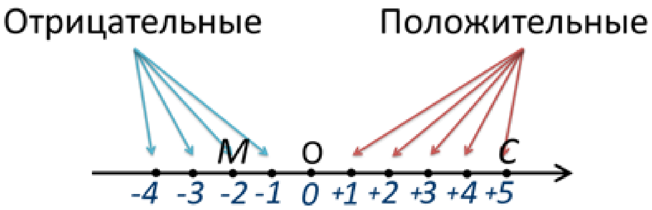
Координатная прямая – это прямая, на которой выбрано начало отсчёта; единичный отрезок. Стрелкой обозначено положительное направление.

Координата точки показывает, на каком расстоянии от начала отсчёта расположена точка.

Числа, которые мы откладываем левее начала отсчёта, называют ***отрицательными***.

Числа, которые мы откладываем правее начала отсчёта, называют ***положительными***.

Число 0 не является ни отрицательным, ни положительным числом.



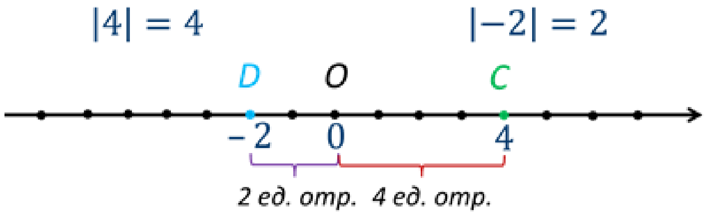
Два числа, отличающиеся друг от друга только знаками, называют ***противоположными числами***.

Все положительные числа больше нуля.
Все отрицательные числа меньше нуля.

Любое отрицательное число меньше положительного.

Модуль числа

Модулем числа a называют расстояние (в единичных отрезках) от начала координат до точки *A (a)*.



Модулем положительного числа называется само это число.

Модулем отрицательного числа называется противоположное ему число.

Модуль числа 0 равен 0.

Модули противоположных чисел равны.

Из двух положительных чисел больше то, чей модуль больше.

Из двух отрицательных чисел больше то, чей модуль меньше.

Рациональные числа

Число, которое можно записать в виде отношения $\frac{a}{n}$,
где a – целое число, n – натуральное число, называют ***рациональным числом***.

Сумма, разность и произведение рациональных чисел – тоже рациональные числа.

Если делитель отличен от нуля, то частное двух рациональных чисел – тоже рациональное число.

Действия с рациональными числами

Чтобы сложить два отрицательных числа,
нужно взять сумму их модулей со знаком «минус».

Алгоритм сложения отрицательных чисел

Для того чтобы сложить два отрицательных числа, нужно:

1) сложить модули этих чисел;

2) перед полученным числом поставить знак «минус».

Чтобы сложить два числа с разными знаками и разными модулями,
нужно из большего модуля вычесть меньший модуль
и перед разностью поставить знак числа, модуль которого больше.

Действия с рациональными числами

Чтобы вычесть из данного числа другое число,
надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

$$\boxed{a - b = a + (-b)}$$

Чтобы умножить два числа с разными знаками,
нужно умножить их модули и перед произведением поставить знак «минус».

$$\boxed{|a \cdot b| = |a| \cdot |b|}$$

Чтобы умножить два отрицательных числа,
нужно умножить их модули.

Знак произведения зависит от знаков множителей:
если множители имеют одинаковые знаки
(т. е. оба положительны или оба отрицательны),
то произведение положительно, а если разные – отрицательно.

Действия с рациональными числами

$$|a : b| = |a| : |b|$$

Чтобы разделить отрицательное число на отрицательное,
нужно модуль делимого разделить на модуль делителя.

Чтобы разделить числа с разными знаками,
нужно модуль делимого разделить на модуль делителя
и перед полученным числом поставить знак «минус».

Знак частного зависит от знаков делимого и делителя:
если делимое и делитель имеют одинаковые знаки
(т. е. оба положительны или оба отрицательны),
то частное положительно, а если разные – отрицательно.

Свойства действий с рациональными числами

Свойства сложения:

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

$$a + 0 = a$$

$$a + (-a) = 0$$

Свойства умножения:

$$a \cdot b = b \cdot a$$

$$a(bc) = (ab)c$$

$$a \cdot 1 = a$$

$$a \cdot \frac{1}{a} = 1, a \neq 0$$

$$a \cdot 0 = 0$$

$$(a + b) \cdot c = ac + bc$$

Раскрытие скобок

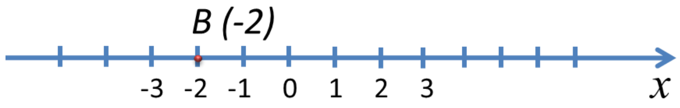
Если перед скобками стоит знак «+»,
то можно опустить скобки и этот знак «+»,
сохранив знаки слагаемых, стоящих в скобках.

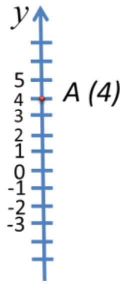
Если первое слагаемое в скобках записано без знака,
то его надо записать со знаком «+».

Если перед скобками стоит знак «–»,
то скобки и этот знак «минус» можно убрать,
а знаки перед числами внутри скобок изменить на противоположные.

Координатная плоскость

Числа, с помощью которых указывают,
где находится некоторый объект,
называют его ***координатами***.

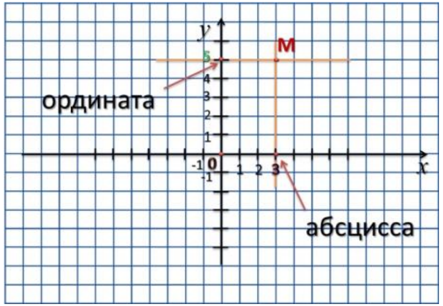




Координаты точки (x; y) на плоскости – это пара чисел,
в которой на первом месте стоит абсцисса (x),
а на втором – ордината (y) этой точки.

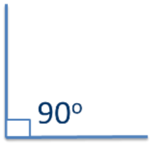
Координаты можно указать для любой точки координатной плоскости:
для этого надо из точки провести перпендикуляры на координатные оси
и определить, какому числу координатной оси соответствует основание перпендикуляра.

Каждой точке на координатной плоскости соответствует пара чисел:
её абсцисса и ордината.

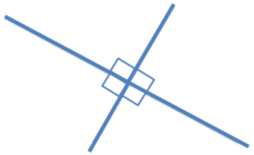


Наоборот, каждой паре чисел соответствует одна точка плоскости,
для которой эти числа являются координатами.

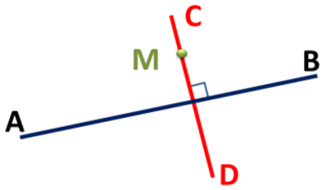
Геометрические сведения



Прямой угол – это угол, градусная мера которого равна 90°.

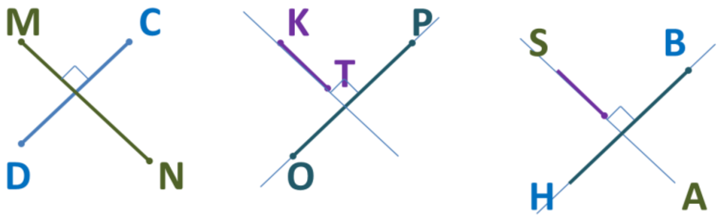


Две прямые, образующие при пересечении прямые углы, называются ***перпендикулярными***.

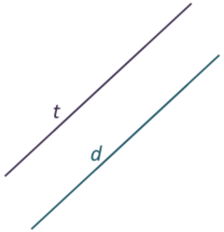


Через любую точку плоскости можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной.

Отрезки (или лучи), лежащие на перпендикулярных прямых, называются ***перпендикулярными***.

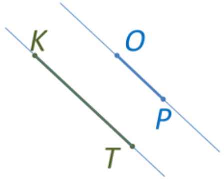


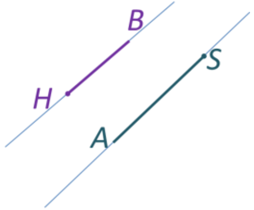
Геометрические сведения



Две непересекающиеся прямые на плоскости называются ***параллельными***.

Через каждую точку плоскости, не лежащую на данной прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной.





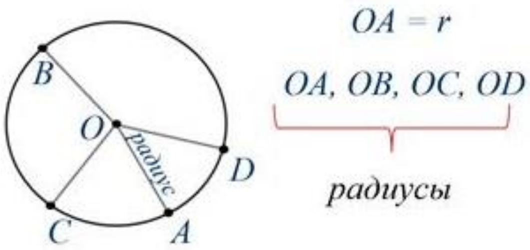
Отрезки (или лучи), лежащие на параллельных прямых, называются ***параллельными***.

Если две прямые на плоскости параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Если две прямые на плоскости перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны.

Геометрические сведения

Отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой на окружности, называется ***радиусом***.
Радиус обозначают маленькой латинской буквой **r**.

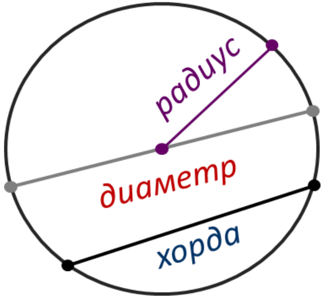


Все точки окружности равноудалены от её центра,
т. е. удалены от центра на расстояние, равное длине радиуса.

Отрезок, концы которого лежат на окружности, называется ***хордой***.

Хорда, проходящая через центр окружности, называется её ***диаметром***.

Диаметр окружности в два раза длиннее радиуса.



Все диаметры окружности равны между собой.

Часть плоскости, находящаяся внутри окружности,
вместе с этой окружностью называется ***кругом***.

Геометрические сведения

Отношение длины окружности к длине её диаметра является одним и тем же числом для любой окружности.

C – длина окружности; D – диаметр окружности;

$$C : D = \pi$$

$$\boxed{C = \pi \cdot D}$$

Площадь круга можно вычислить по формуле:

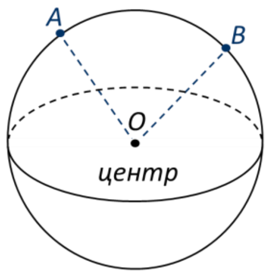
$$\boxed{S_{\text{круга}} = \pi R^2}$$

Геометрические сведения

Шар – простейшее геометрическое тело.

Поверхность шара называют ***сферой***.

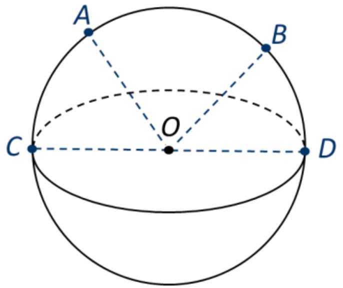
Отрезок, соединяющий любую точку сферы с центром шара, называется ***радиусом*** шара.



OA = OB

OA – радиус, OB – радиус

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через центр шара, называется ***диаметром*** шара.



OA – радиус, OB – радиус

OC – радиус, OD – радиус

CD – диаметр

CD = CO + OD

d = 2R