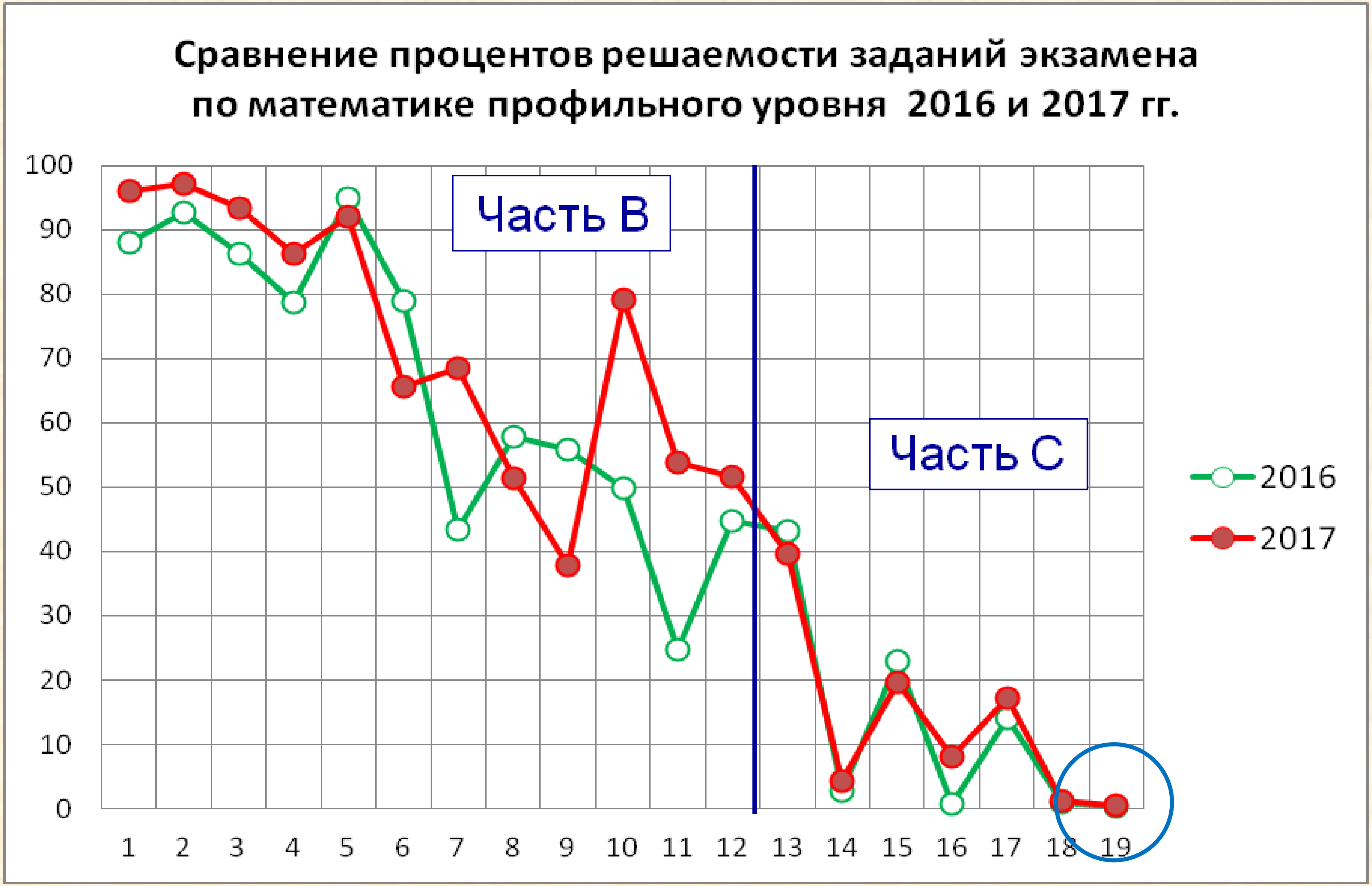
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«Московский институт электронной техники»
Зеленоград 3 января 2018

Рекомендации по подготовке к выполнению задания №19 ЕГЭ профильного уровня

Прокофьев Александр Александрович,

Зав.каф. «Высшей математики – 1», НИУ МИЭТ,
учитель математики ГБОУ г. Москвы «Школа №1298»

Сравнение процентов решаемости заданий в ЕГЭ 2016 и 2017 гг.



Что можно ожидать в качестве задания 19 на экзамене?

Задание 19

Тип задания по кодификатору требований	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели.
Характеристика задания	Задача, связанная со свойствами делимости целых чисел, логическим перебором.
Комментарий	Задание олимпиадного типа, рассчитанное на сильных учащихся. Для того чтобы продвинуться в его решении, не требуется никаких специальных знаний, выходящих за рамки стандарта математического образования, однако необходимо проявить определённый уровень математической культуры, логического мышления, который формируется при решении задач профильного уровня на протяжении всего обучения в школе. Ответ на первый вопрос задачи по силам большинству успевающих учеников, главное здесь — не испугаться условия, дочитать его до конца и немного подумать.

Характеристика задания 19 ЕГЭ профильный уровень

Спецификация КИМ

№	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на базовом уровне, в минутах	Примерное время выполнения задания учащимся, изучавшим математику на профильном уровне, в минутах
19	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1, 5.3	1.1–1.4	В	4	–	40 минут

5.1. Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

5.3. Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения.

Общность всех формулировок заданий №19

С 2010 года вариант ЕГЭ по математике содержит четырехбалльное задание С6 (в этом году №19) олимпиадного характера. Большую долю среди задач, уже использованных в вариантах экзамена, составляют задачи на последовательности (чисел, ходов, наборов чисел и т.д.)

Характерной особенностью подобных задач является исследование элементов заданной последовательности следующего вида:

а) на наличие элемента, обладающего заданным свойством;

б) подсчет количества элементов, обладающих заданным свойством;

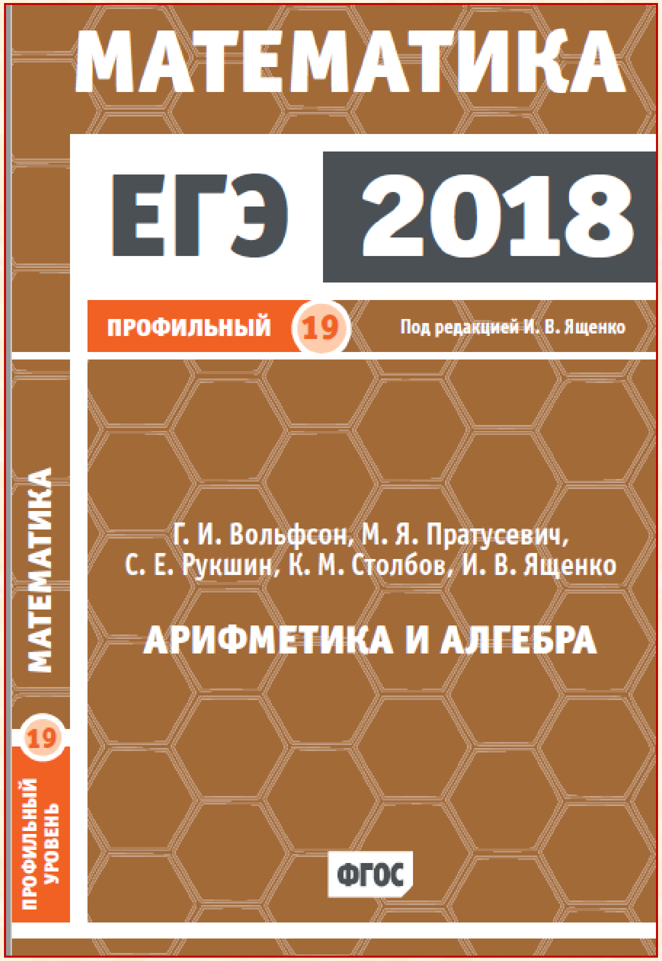
в) оценка (наибольшего или наименьшего значения) либо количества элементов, обладающих заданным свойством, либо некоторой числовой характеристики заданных элементов;

г) приведение примера, подтверждающего полученную оценку (*подразумевается, но в условии не формулируется!*).

Критерии проверки задания №19

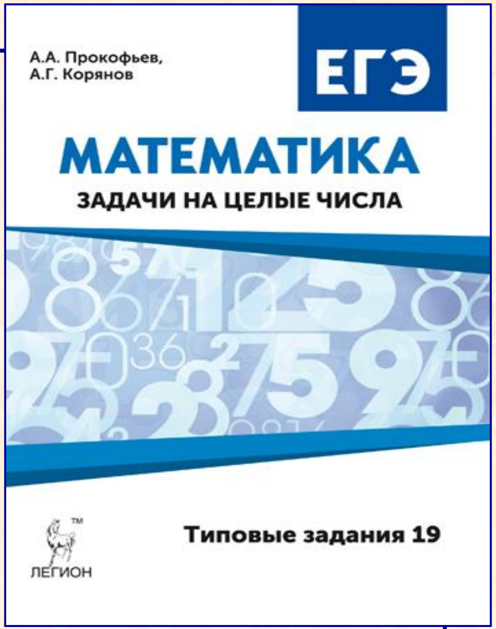
Содержание критерия	Баллы
Верно получены все перечисленные (см. критерий на 1 балл) результаты	4
Верно получены три из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	3
Верно получены два из перечисленных (см. критерий на 1 балл) результатов	2
Верно получен один из следующих результатов: – пример в п. *а*; – обоснованное решение п. *б*; – искомая оценка в п. *в*; – пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Создано разработчиками ЕГЭ



Тест на эрудицию. Вопрос: что означает последовательность чисел 14 – 20 – 36 – 50?

Пособие Прокофьева А.А. и Корянова А.Г. издательства Легион по заданию 19



Оглавление

Основные олимпиадные идеи, используемые при решении подобных задач

1. Идея «чет-нечет». Используется, когда рассматриваемая величина (например, сумма или произведение) имеет определённую чётность, что позволяет доказать невозможность ситуации, в которых она имеет другую чётность.
2. Уравнения в целых числах. Используемые в решении формулы (например, общего члена прогрессии, суммы n первых членов прогрессии, характеристическое свойство) в силу целочисленности входящих в них переменных приводят к необходимости исследования уравнения в целых числах.
3. Свойства делимости целых чисел (признаки делимости, деление без остатка, деление с остатком, анализ остатков).
4. Идея «усиления неравенства», используемая при замене в неравенстве какой-нибудь переменной на ее возможное наибольшее или наименьшее значение.
5. Метод «перебора» значений целочисленной переменной из ограниченного набора.

Классификация заданий 19 ЕГЭ, в которых присутствуют последовательности

1. Задачи на арифметическую прогрессию.
2. Задачи на геометрическую прогрессию.
3. Задачи на произвольные последовательности чисел, заданные формулой *n*-го члена или каким-либо ограничением, накладываемым на их элементы.
4. Задачи на последовательности наборов чисел.
5. Задачи на последовательности ходов.

Как правило, во всех подобных задачах оговаривается целочисленность элементов членов последовательностей, элементов в наборах чисел или элементов, получаемых на каждом шаге в последовательности ходов.

Пример из демоверсии ЕГЭ 2018 (профильный уровень)

19

На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k-8l+0\cdot m=-3(k+l+m)$.

а) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k+l+m$ — количество целых чисел — делится на 4. По условию $40<k+l+m<48$, поэтому $k+l+m=44$. Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведём равенство $4k-8l=-3(k+l+m)$ к виду $5l=7k+3m$. Так как $m\geq 0$, получаем, что $5l\geq 7k$, откуда $l>k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Подставим $k+l+m=44$ в правую часть равенства $4k-8l=-3(k+l+m)$: $4k-8l=-132$, откуда $k=2l-33$. Так как $k+l\leq 44$, получаем: $3l-33\leq 44$; $3l\leq 77$; $l\leq 25$; $k=2l-33\leq 17$, то есть положительных чисел не более 17.

Приведём пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число -8 и 2 раза написан 0. Тогда $\frac{4\cdot 17-8\cdot 25}{44}=-3$; указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17.

Задачи на арифметическую прогрессию

Набор основных формул для арифметической прогрессии.

- $\boxed{d = a_{n+1} - a_n,\ n \in \mathbb{N};}$ $d = \dfrac{a_n - a_m}{n - m}$, $n \neq m$, в частности $d = \dfrac{a_n - a_1}{n - 1}$.
- Если $a_n = kn + b$, где k и b – некоторые числа, то $\{a_n\}$ – арифметическая прогрессия.
- $\boxed{a_n = a_1 + d(n-1)}$ – формула n-го (общего) члена: и в общем виде $a_n = a_m + d(m-n)$, $n, m \in \mathbb{N}$.
- $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$ – характеристическое свойство арифметической прогрессии; в общем виде $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$, $1 \le k \le n-1$, $n, k \in \mathbb{N}$.
- $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ и $\boxed{S_n = \dfrac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n}$ – формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии.

Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Арифметическая прогрессия в задачах С6 ЕГЭ. // «Математика для школьников»,− М.: «Школьная пресса», – 2014.– № 5. − С. 3-22.

Задачи на арифметическую прогрессию

№1. (**ЕГЭ**, **2013**). Дано n различных натуральных чисел (не менее трех), составляющих арифметическую прогрессию.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 800?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 111.

Задачи на арифметическую прогрессию

№1. (**ЕГЭ**, **2013**). Дано *n* различных натуральных чисел (не менее трех), составляющих арифметическую прогрессию.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?

б) Каково наибольшее значение *n*, если сумма всех данных чисел меньше 800?

в) Найдите все возможные значения *n*, если сумма всех данных чисел равна 111.

Решение. а) Например, числа 5, 6, 7.

б) Пусть прогрессия ($a_1 \geq 1$ и $d > 0$), – возрастающая. Тогда

верно неравенство $\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n \boxed{\geq} \frac{2 + (n-1)}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2} < 800$.

Отсюда $n \leq 39$. Прогрессия 1, 2, …, 39 (сумма $780 < 800$), т.е. $n = 39$.

в) По условию $\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = 111$; $\left(2a_1 + d(n-1)\right)n = 222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$.

Если $n \geq 37$, то $\left(2a_1 + d(n-1)\right)n \boxed{>} 36 \cdot 37 > 222$, т.е. $n < 37$.

Получаем возможные значения $n = 3$ или $n = 6$.

Примеры таких прогрессий: 36, 37, 38 и 16, 17, 18, 19, 20, 21.

Ответ: а) да, например, 5, 6, 7; б) 39; в) 3; 6.

Задачи на арифметическую прогрессию

№2. (**МИОО**, **2014**). Несколько различных натуральных чисел, в десятичной записи которых отсутствуют цифры 1 и 9, составляют арифметическую прогрессию.

а) Может ли сумма всех членов такой прогрессии быть равной 298?

б) Может ли в прогрессии быть 35 членов?

в) Показать, что если разность этой прогрессии не меньше 4, но не больше 8, то количество членов не превосходит 18.

г) Привести пример, когда разность арифметической прогрессии не меньше 4, но не больше 8, а количество членов равно 18.

Задачи на арифметическую прогрессию

№2. (**МИОО**, **2014**). Несколько различных натуральных чисел, в десятичной записи которых отсутствуют цифры 1 и 9, составляют арифметическую прогрессию.

а) Может ли сумма всех членов такой прогрессии быть равной 298?

б) Может ли в прогрессии быть 35 членов?

в) Показать, что если разность этой прогрессии не меньше 4, но не больше 8, то количество членов не превосходит 18.

г) Привести пример, когда разность арифметической прогрессии не меньше 4, но не больше 8, а количество членов равно 18.

Решение. Пусть прогрессия ($a_1 \geq 1$ и $d > 0$), – возрастающая.

а) $S = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = 298$. Отсюда $(2a_1 + (n-1)d) \cdot n = 2 \cdot 2 \cdot 149$,

т.е. возможные значения n: 2, 4, 149, 298 и 596.

При $n = 4$ имеем $2a_1 + 3d = 149$. Если $d = 1$, то $a_1 = 73$, $S = 298$.

б) При $a_1 = 20$ и $d = 2$ получим прогрессию 20, 22, …, 88 ($n = 35$).

в) Пусть $4 \leq d \leq 8$. В последовательности 0, 1, …, 98, 99 содержится последовательность 20, 24, …, 88 (наибольшей длины), которая не содержит цифр 1 и 9. Тогда $n \leq 1 + \dfrac{88-20}{4} = 18$.

г) Например, $a_1 = 20$ и $d = 4$: 20, 24, …, 88.

Ответ:
а) да; б) да;
г) $a_1 = 20$, $d = 4$.

Задачи на геометрическую прогрессию

Полезные факты.

1. В геометрической прогрессии, состоящей из целых чисел, знаменатель q – рациональное число ($\Leftarrow b_k = b_{k-1} \cdot q$).

2. В конечной геометрической прогрессии $b_1, b_2, \ldots, b_k$ со знаменателем $q = \frac{m}{n}$, где дробь $\frac{m}{n}$ несократима, все члены прогрессии имеют вид ($b_k = b_1 \cdot q^{k-1} \Rightarrow$):

$$b_1 = a \cdot n^{k-1},\ b_2 = a \cdot n^{k-2} \cdot m,\ \ldots,\ b_{k-1} = a \cdot n \cdot m^{k-2},\ b_k = a \cdot m^{k-1},\ a \in \mathbb{Z}.$$

3. В бесконечной геометрической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, знаменатель является натуральным числом.

Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Геометрические прогрессии в задачах уровня С6 ЕГЭ. // «Потенциал». − М., − 2015. − №3. − С. 22-31.

Задачи на геометрическую прогрессию

№3. (**МИОО, 2011**). Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1344 и из них образуют геометрическую прогрессию:

а) три числа;

б) четыре числа;

в) пять чисел?

Основная теорема арифметики. Для каждого натурального числа, большего единицы, существует единственное разложение на простые множители.

Каноническое разложение целого числа $n > 1$:

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ – попарно различные простые числа, а $k_1, k_2, \ldots, k_s$ – натуральные числа.

Задачи на геометрическую прогрессию

№3. (**МИОО, 2011**). Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1344 и из них образуют геометрическую прогрессию:

а) три числа; б) четыре числа; в) пять чисел?

Решение. Заметим, что $1344 = 2^6 \cdot 3 \cdot 7$.

а) Первому условию удовлетворяют числа 3, 7, 2, 4, 8.

б) Второму условию удовлетворяют числа 1, 2, 4, 8, 21.

в) Пусть также $1344 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 \cdot n_5$, где n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 – различны и $n_2 = n_1 \cdot q$, $n_3 = n_1 \cdot q^2$, $n_4 = n_1 \cdot q^3$, $n_5 = n_1 \cdot q^4$, $q \in \mathbb{Q}$. Перемножив числа, получим $n_1^5 \cdot q^{10} = 1344$.

Пусть $q = \dfrac{k}{m}$, где числа $k, m \in \mathbb{N}$ и взаимно просты. Из равенства $n_1^5 \cdot \dfrac{k^{10}}{m^{10}} = \left(\dfrac{n_1}{m^2}\right)^5 \cdot k^{10} = 1344$ следует, что число 1344 делится на k^{10} и $k \neq 1$. Противоречие.

Ответ: а) да; б) да; в) нет.

Задачи на геометрическую прогрессию

№4. (МИОО, 2011). Все члены геометрической прогрессии – различные натуральные числа, заключенные между числами 210 и 350.

а) Может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?

б) Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

Любой вариант ответов без обоснования:

Ответ	*Оценка*
а) да; б) нет.	0
а) нет; б) да.	0
а) нет; б) нет.	0
а) да; б) да.	0

Задачи на геометрическую прогрессию

№4. (МИОО, 2011). Все члены геометрической прогрессии – различные натуральные числа, заключенные между числами 210 и 350.
а) Может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?
б) Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

Решение. а) Взяв $b_1 = 216 = 6^3$ и $q = \frac{7}{6}$, получим $b_2 = 6 \cdot 6 \cdot 7 = 252$, $b_3 = 6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$ и $b_4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$.

б) Предположим, что такая прогрессия из пяти членов существует. Пусть b_1 – её первый член есть и знаменатель $q = \frac{m}{k}$, где m и k взаимно просты. Тогда $210 < b_1 < b_1 q < \ldots < b_1 q^4 < 350$.

Так как $b_1 q^4 = \frac{b_1}{k^4} \cdot m^4$, то b_1 делится на k^4, а значит, $m^4 < 350$, откуда $m \le 4$. Имеем $q > 1$, $k < m$ и $k \le m - 1 \le 3$. Отсюда

$$q = \frac{m}{k} \ge \frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} \ge 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \quad \text{и} \quad b_1 q^4 \ge b_1 \cdot \frac{4^4}{3^4} > 210 \cdot \frac{256}{81} > 350,$$

что противоречит требованию задачи.

Ответ: а) да; б) нет.

Задачи на последовательности

Иногда последовательность чисел задается возвратным уравнением $ma_{n+2} = pa_{n+1} - ta_n$. Рассмотрим один частный случай, используемый в подобных задачах.

Пусть последовательность задана уравнением $ma_{n+2} = pa_{n+1} - ta_n$, где $p = m + t$. Тогда $m(a_{n+2} - a_{n+1}) = t(a_{n+1} - a_n)$.

Обозначив $b_k = a_{k+1} - a_k$, получаем $mb_{k+1} = tb_k$, т.е. $b_{k+1} = \frac{t}{m} b_k$.

Значит, $\{b_n\}$ – геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{t}{m}$.

Так как $b_k + a_k = a_{k+1}$,

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1} = ... = a_1 + b_1 + ... + b_{n-1} = a_1 + \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Последовательности чисел в задачах С6 ЕГЭ. // «Математика». – М.: «Первое сентября». – 2015. – №1. − С. 17-26.

Задачи на последовательности

№5. Конечная возрастающая последовательность $a_1, a_2, ..., a_n$, состоит из $n \geq 3$ различных натуральных чисел, причем при всех натуральных $k \leq n-2$ выполнено равенство

$$4a_{k+2} = 7a_{k+1} - 3a_k.$$

а) Приведите пример такой последовательности при $n = 5$.

б) Может ли в такой последовательности при некотором $n \geq 3$ выполняться равенство $a_n = 4a_2 - 3a_1$?

в) Какое наименьшее значение может принимать a_1, если $a_n = 527$?

Прокофьев А.А. Последовательности в задании 19 ЕГЭ. // «Математика». – М.: МЦНМО. – 2017. – №7-8. − С. 29-39.

Задачи на последовательности

№5.

Решение. $4a_{k+2} = 7a_{k+1} - 3a_k \quad \Rightarrow \quad 4(a_{k+2} - a_{k+1}) = 3(a_{k+1} - 3a_k).$

Обозначив $b_k = a_{k+1} - a_k$, получаем $b_{k+1} = \boxed{\frac{3}{4}} b_k$.

а) $a_2 = a_1 + b_1,\ a_3 = a_2 + \frac{3}{4} b_1,\ a_4 = a_3 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 b_1,\ a_5 = a_4 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 b_1.$

Пусть $a_1 = 1,\ b_1 = 64.$ Получаем числа 1, 65, 113, 149, 176.

б) Нет, так как $a_n = a_1 + \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} < a_1 + \frac{b_1}{1 - q} = a_1 + 4b_1 = 4a_2 - 3a_1.$

в) $527 = a_n = a_1 + \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = a_1 + \frac{b_1(4^{n-1} - 3^{n-1})}{4^{n-2}}.$

Идея «усиления неравенства»

Отсюда, $527 - a_1 = \frac{b_1}{4^{n-2}} \cdot (4^{n-1} - 3^{n-1}).$

$4^2 - 3^2 = 7,\ 4^3 - 3^3 = 37,\ 4^4 - 3^4 = 175,\ 4^5 - 3^5 = 781.$

Остатки при делении 527 на $4^{n-1} - 3^{n-1}$: 2, 9, 2 и 527.
Наименьшее значение $a_1 = 2$. Пример: 2, 302 и 527.

Ответ: а) например, 1, 65, 113, 149, 176; б) нет; в) 2.

Задачи на последовательности

№6.

Пример 13. ЕГЭ 2016 В конечной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1$, $a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа может состоять такая последовательность?

Идея «чет-нечет»

Решение. а) 1, 4, 21, –16, 41, –36, 61, –56, 81, – 78, 103, –100, 125, –122, 147, –144, 169, –166, 191, –188, 213, –210, 235.

б) Нет. Поскольку сумма двух соседних членов есть нечетное число, они имеют разную четность. Следовательно, все члены с нечетными индексами нечетны, а с четными четны. Поэтому 1000-й член не может равняться 235.

в) Рассмотрим три последовательных члена последовательности

$$a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, (1 \le k \le n-2).$$

Поскольку $a_k + a_{k+1} \ge 3, a_{k+1} + a_{k+2} \le 25, \quad \Rightarrow \quad a_{k+2} \le a_k + 22.$

Последовательность состоит из нечетного числа членов.

Задачи на последовательности

$$a_n = a_{2m+1} \le a_{2m-1} + 22 \le a_{2m-3} + 2 \cdot 22 \le \ldots \le a_1 + m \cdot 22,$$

$$235 \le 1 + m \cdot 22 \quad \Rightarrow \quad m \ge 11.$$

Значит, последовательность состоит из не менее 23 членов. Пример пункта а) удовлетворяет этой оценке.

Ответ: б) нет; в) 23.

№19

а) 1; 4; -1; 26; -23; 48; -45; 70; -67; 93; -90; 115; -112; 137; -134; 159; -156; 181; $\boxed{-178;}$ 193; -190; 215; -210; 235

б) да, может, например в последовательности, приведенной выше 24 числа, но если начать её не „1;4;-1;26;" , а „1;4;1;4;1;4;1;4;1;4", то можно ~~[illegible]~~ увеличить на любое чётное число элементов. Так, для моей последовательности можно прибавить 976 лишних элементов ~~[illegible]~~ (488 пар таких „1;4;") и в ней будет 1000 членов

в) 24

0 баллов

Процент решаемости этого задания

Баллы	4	3	2	1
Проценты	1,65	1,03	2,67	10,53

Задачи на последовательности

№7.

ЕГЭ 2016

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ состоит из $n \geq 3$ натуральных чисел, причем каждый член последовательности (кроме первого и последнего) больше среднего арифметического соседних (стоящих рядом с ним членов).

а) Приведите пример такой последовательности, состоящей из четырех членов, сумма которых равна 50.

б) Может ли такая последовательность состоять из шести членов и содержать два одинаковых числа?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма членов такой последовательности при $n = 10$?

Решение. а) Например, последовательность 1, 12, 17, 20 удовлетворяет условию задачи, а ее сумма членов равна 50.

б) Например, последовательность 1, 12, 20, 20, 12, 1 удовлетворяет условию задачи.

в) Для $2 \le k \le 9$ выполнено неравенство $\dfrac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} \le a_k$.

Отсюда $a_{k-1}+a_{k+1} < 2a_k$ и $a_{k+1}-a_k < a_k - a_{k-1}$, то есть последовательность разностей соседних членов последовательности убывает. убывает. Пусть $d_k = a_{k+1}-a_k$. Тогда верна цепочка неравенств

$$d_k \le d_{k-1}-1 \le d_{k-2}-2 \le \ldots \le d_1 - k + 1,$$

и для a_1 и a_{10} имеем:

$$a_1 = a_k - d_{k-1} - \ldots - d_1 \le a_k - (d_k - 1) - \ldots - (d_k + k - 1) = a_k - (k-1)d_k - \frac{k(k-1)}{2},$$

$$a_{10} = a_k + d_k + \ldots + d_9 \le a_k + d_k + (d_k - 1) + \ldots + (d_k - 9 + k) = a_k - (10-k)d_k - \frac{(9-k)(10-k)}{2}.$$

Поскольку $a_1 \ge 1$ и $a_{10} \ge 1$, то

$$a_k - (k-1)d_k - \frac{k(k-1)}{2} \ge 1, \quad a_k - (10-k)d_k - \frac{(9-k)(10-k)}{2} \ge 1.$$

Умножив первое из этих неравенств на $10-k$, а второе на $k-1$ и сложив их, получим: $9a_k - \dfrac{9(k-1)(10-k)}{2} \ge 9$, $a_k \ge \dfrac{(k-1)(10-k)}{2} + 1$.

Отсюда

$$a_1 \ge 1,\ a_2 \ge 5,\ a_3 \ge 8,\ a_4 \ge 10,\ a_5 \ge 11,\ a_6 \ge 11,\ a_7 \ge 10,\ a_8 \ge 8,\ a_9 \ge 5,\ a_{10} \ge 1.$$

Сумма чисел $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} \ge 70$.

Последовательность чисел 1, 5, 8, 10, 11, 11, 10, 8, 5, 1 удовлетворяет условию задачи, и ее сумма равна 70.

Ответ: а) 1, 12, 17, 20; б) да; в) 70.

Задача на последовательность ходов

№8.

ЕГЭ 2016

На доске написаны числа 2 и 3. За один ход два числа a и b, написанные на доске, заменяются на два числа $a+b$ и $2a-1$ или числа $a+b$ и $2b-1$ (например, из чисел 2 и 3 можно получить числа 5 и 3 или 5 и 5).

а) Приведите пример последовательности ходов, после которых одно из чисел, написанных на доске, окажется числом 19.

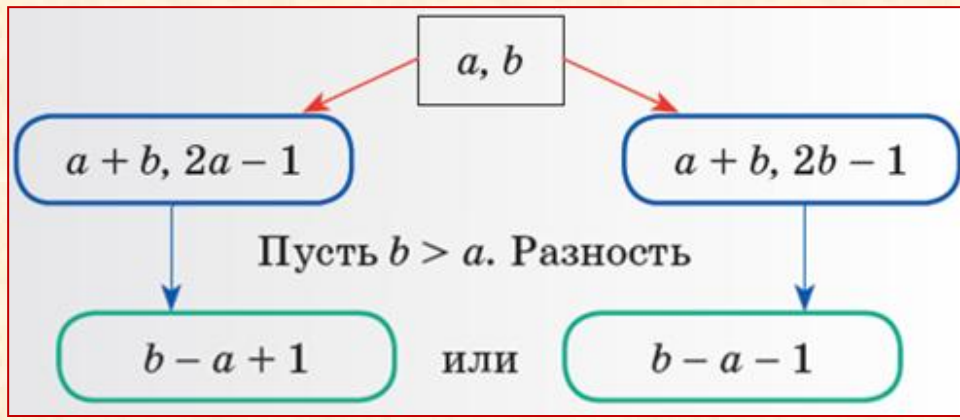
б) Может ли после 100 ходов одно из двух чисел, написанных на доске, оказаться числом 200?

в) Сделали 1007 ходов, причем на доске никогда не было равных Какое наименьшее значение может принимать разность большего и меньшего из полученных чисел?

б) После первого хода получим 3, 5 или 5, 5. После каждого следующего хода каждое число увеличивается, по крайней мере на 2. За 100 шагов меньшее из чисел будет не менее

$$3 + 2 \cdot 99 = 201.$$

в) Первоначально разность равна 1. Далее 504 хода ее увеличиваем на 1 и 503 хода уменьшаем на 1. Получим наименьшее значение, равное 2.



Ответ:
б) нет; в) 2.

МАТЕМАТИКА
МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
А. ПРОКОФЬЕВ №7–8 (784)

Наборы чисел

№9

ЕГЭ 2017

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \ldots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

б) Пусть на доске ровно одно красное число. Тогда зелёных чисел 29, а их сумма не меньше, чем сумма 29 наименьших чисел, делящихся на 3:

$$3 + 6 + \ldots + 87 = \frac{90 \cdot 29}{2} = 1305.$$

Это противоречит тому, что сумма написанных чисел равна 1067.

в) Пусть на доске написано n красных чисел и $30 - n$ зелёных чисел. Тогда сумма красных чисел не меньше

$$7 + 14 + \ldots + 7n = \frac{7n^2 + 7n}{2},$$

а сумма зелёных чисел не меньше $3 + 6 + \ldots + 3(30 - n) = \dfrac{3n^2 - 183n + 2790}{2}$.

Таким образом, $1067 \geq 5n^2 - 88n + 1395$; $5n^2 - 88n + 328 \leq 0$, откуда, учитывая, что n — целое, получаем $n \geq 6$.

Приведём пример 6 красных чисел и 24 зелёных чисел, сумма которых равна 1067: 7, 14, 21, 28, 35, 56, 3, 6, …, 66, 69, 78.

Задача на среднее арифметическое

№10

ЕГЭ 2017

19

Каждый из 28 студентов или писал одну из двух контрольных работ, или писал обе контрольные работы. За каждую работу можно было получить целое число баллов от 0 до 20 включительно. По каждой из двух контрольных работ в отдельности средний балл составил 15. Затем каждый студент назвал наивысший из своих баллов (если студент писал одну работу, то он назвал балл за неё). Среднее арифметическое названных баллов оказалось равно S.

а) Приведите пример, когда $S<15$.

б) Могло ли значение S быть равным 5?

в) Какое наименьшее значение могло принимать S, если обе контрольные работы писали 10 студентов?

в) Пусть a — сумма баллов тех студентов, которые писали только одну контрольную работу, b — сумма наибольших баллов тех студентов, которые писали обе контрольные работы, c — сумма наименьших баллов тех студентов, которые писали обе контрольные работы, k — количество студентов, писавших обе контрольные работы. . Тогда получаем:

$$a+b=S\cdot 28=28S,\ a+b+c=15\cdot(28+10)=570,$$

откуда $S=\dfrac{a+b}{28}=\boxed{\dfrac{570-c}{28}\geq\dfrac{570-10\cdot 20}{28}}=\dfrac{185}{14}$.

Идея «усиления неравенства»

Приведём пример, когда $S=\dfrac{185}{14}$. Если $b=c=200$ (то есть 10 студентов писали обе контрольные работы и получили по 20 баллов за каждую), а $a=170$ (например, каждую контрольную работу писали по 9 студентов, из которых четверо получили по 10 баллов, а пятеро — по 9 баллов), то условия задачи выполнены и $S=\dfrac{185}{14}$.

Подготовительные задания 19

Подготовительные задания

1 Докажите, что уравнение $9x^2+6xy+3y^2=4321$ не имеет решений в целых числах.

2 Решите в целых числах уравнение $y=5+\frac{1}{x}$.

3 Решите в целых числах уравнение $y=\frac{2x-3}{x}$.

4 Решите в целых числах уравнение $(2x+3y+4)(3x+2y+4)=1$.

5 Решите в целых числах уравнение $2x-3xy+9y=1$.

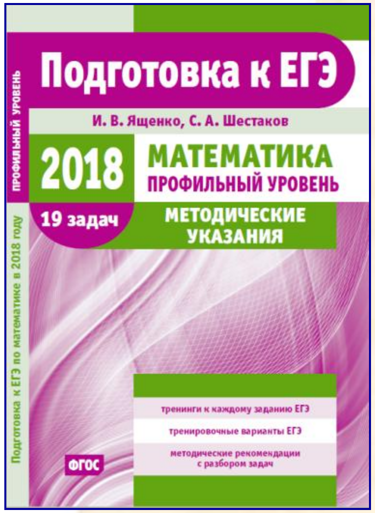
6 Найдите все $n\in\mathbb{Z}$, при которых число A является целым, если $A=\frac{6n-2}{2n+3}$.

7 Найдите все $n\in\mathbb{Z}$, при которых число A является целым, если $A=\frac{5n-3}{3n+4}$.

8 На какое наибольшее натуральное число можно сократить дробь A, если $n\in\mathbb{Z}$ и $A=\frac{5n+6}{7n+8}$?

9 На какое наибольшее натуральное число можно сократить дробь $\frac{2n+3m}{4m-5n}$, если известно, что она сократима, а дробь $\frac{m}{n}$ несократима ($n\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$)?

10 Сумма пяти наименьших натуральных делителей натурального числа равна 17, а сумма четырех наибольших его делителей равна 671. Найдите это число.



Ответы к подготовительным заданиям 19

Задача 19. Подготовительные задания

2. $(-1; 4)$; $(1; 6)$. **3.** $(1; -1)$; $(3; 1)$; $(-1; 5)$; $(-3; 3)$. **4.** $(-1; -1)$.
5. $(8; 1)$; $(2; -1)$. **6.** $-7; -2; -1; 4$. **7.** $-11; -1$. **8.** 2. **9.** 23. **10.** 330.

Зачетные задания 19

Зачётные задания

1 Дана последовательность натуральных чисел, в которой каждый член начиная со второго отличается от предыдущего либо на 10, либо в 6 раз. Сумма всех членов последовательности равна 257.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее число членов может быть в этой последовательности?

2 Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

а) пять; б) четыре; в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

3 Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключённые между числами 510 и 740.

а) Может ли такая прогрессия состоять из четырёх членов?

б) Может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

Зачетные задания 19

4 Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности начиная со второго либо в 13 раз больше, либо в 13 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3345.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

5 Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел $-11,\ 12,\ 13,\ -14,\ -15,\ 17,\ -18,\ 19.$

Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел

$$-11,\ 12,\ 13,\ -14,\ -15,\ 17,\ -18,\ 19.$$

После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 117?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Зачетные задания 19

6 Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отличной от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.

а) Может ли в такой прогрессии быть 10 членов?

б) Докажите, что число её членов меньше 100.

в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.

г) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами.

7 Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все их возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доске в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор

$$2,\ 3,\ 5,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10.$$

а) На доске выписан набор -3, -1, 1, 2, 3, 4, 6. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 5 раз. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Зачетные задания 19

8 На листе бумаги написаны в строчку 13 единиц.

а) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

б) Докажите, что если единицы, стоящие на чётных местах, заменить семёрками, то всё равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

в) Докажите, что между любыми 13 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 108.

Зачетные задания 19

9 В течение четверти учитель ставил школьникам отметки «1», «2», «3», «4», «5». Среднее арифметическое отметок ученика оказалось равным 3,5.

а) Какую наибольшую долю могли составлять четвёрки в таком наборе отметок?

б) Учитель заменил одну отметку «4» двумя отметками: одной «3» и одной «5». Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического отметок ученика после такой замены.

в) Учитель заменил каждую отметку «4» двумя отметками: одной «3» и одной «5». Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического отметок ученика после такой замены.

Зачетные задания 19

10 У каждого ученика в классе дома живёт кошка или собака, а у некоторых, возможно, — и кошка, и собака. Известно, что мальчиков, имеющих собак, не более $\frac{1}{4}$ от общего числа учеников, имеющих собак, а мальчиков, имеющих кошек, не более $\frac{5}{11}$ от общего числа учеников, имеющих кошек.

а) Может ли быть в классе 11 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

б) Какое наибольшее количество мальчиков может быть в классе, если дополнительно известно, что всего в классе 21 ученик?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учеников без дополнительного условия пунктов а) и б)?

Ответы к зачетным заданиям 19

Зачётные задания

1. а) 3; б) 72. **2.** а) Нет; б) нет; в) да. **3.** а) Да; б) нет. **4.** а) Нет; б) да; в) 477. **5.** а) Нет; б) нет; в) 4. **6.** а) Да; г) например, 1; 126; ...; 8876. **7.** а) -3; 2; 4; б) 5; в) нет. **8.** а) Например, $(1+1+1)\cdot(1+1+1)\times$ $\times(1+1+1)\cdot(1+1)\cdot(1+1)$; б) например, $(1+7+1)\cdot(7+1+7)\times$ $\times(1+7+1)\cdot(7+1+7+1)$. **9.** а) $\frac{5}{6}$; б) $\frac{11}{3}$; в) $\frac{41}{11}$. **10.** а) Да; б) 11; в) $\frac{6}{13}$.

Спасибо за внимание!

А.А. Прокофьев

Тел.: (499) 729-73-43

E-mail: aaprokof@yandex.ru